Лекция 36. Преобразование Фурье: дальнейшие свойства

Второе (наряду с формулой обращения) важнейшее свойство преобразования Фурье состоит в том, что оно однозначно продолжается до изометрического линейного отображения из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Вот точная формулировка.

Теорема 36.1 (Теорема Планшереля). *Преобразование Фурье, как линейный оператор из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, однозначно продолжается до непрерывного линейного оператора из $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$; при этом $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ и $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ для всех $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Начнем со следующей тривиально проверяемой леммы.

Лемма 36.2. *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то $(\bar{f})\hat{} = (\overline{\hat{f}})\check{}$.*

Из этой леммы и предложения 35.9 немедленно следует, что для $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int f\bar{g}\,dx = \int (\check{f})\hat{}\,\bar{g}\,dx = \int (\hat{f})\check{}\cdot(\bar{g})\hat{}\,d\xi = \int (\hat{f})\check{}\cdot(\overline{\hat{g}})\check{}\,d\xi = \int \hat{f}\cdot\overline{\hat{g}}\,d\xi;$$

в частности, $\|hat f\|_2 = \|f\|_2$. Ввиду предложения 34.15 пространство Шварца плотно в L^2; поскольку, как мы только что проверили, преобразование Фурье сохраняет L^2-норму, оно сохраняет расстояния и тем самым равномерно непрерывно относительно L^2-метрики. Теперь из предложения 10.9 немедленно вытекает, что преобразование Фурье однозначно продолжается для непрерывного отображения из : $L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^2(\mathbb{R}^n)$; его линейность, свойство сохранения расстояний и выполнимость равенства $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ очевидны, так как все эти свойства имеют место на плотном подпространстве $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Следствие 36.3 (Равенство Парсеваля). *Если $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то*

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2, \qquad (\hat{f}, \hat{g}) = (f, g).$$

Если функция f лежит и в $L^1(\mathbb{R}^n)$, и в $L^2(\mathbb{R}^n)$, то теперь мы имеем два разных определения ее преобразования Фурье $\hat{f}$: исходное (как в определении 35.1) и «по Планшерелю». Естественно задаться вопросом, согласуются ли эти два определения. Следующее предложение показывает, что ответ на этот вопрос положителен.

Предложение 36.4. *Если $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, то ее преобразования Фурье, найденные по определению 35.1 и по Планшерелю, равны почти всюду как функции на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Отметим, во-первых, что из равенства Парсеваля и леммы 36.2 вытекает, что предложение 35.9 верно и для функций из L^2 и их преобразований Фурье в смысле Планшереля. Теперь обозначим через $\hat{f}_{\mathrm{orig}}$ и $\hat{f}_{\mathrm{Pl}}$ преобразования Фурье функции f, найденные по определению 35.1 и по Планшерелю соответственно. Из предложения 34.16, в котором в качестве U выбираются всевозможные открытые шары в $\mathbb{R}^n$, вытекает, что достаточно показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{\mathrm{orig}}(\xi)\psi(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}_{\mathrm{Pl}}(\xi)\psi(\xi)d\xi$$

для всякой $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$. Однако же ввиду теоремы 35.10 функция $\hat{\psi} = \eta$ лежит в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Поскольку всякая шварцевская функция лежит в L^2, имеем

$$\int \hat{f}_{\mathrm{orig}}\psi d\xi = \int f\hat{\psi}dx = \int f\eta dx = \int \hat{f}_{\mathrm{Pl}}\psi d\xi,$$

что и требовалось. □

С преобразованием Фурье тесно связана конструкция свертки функций.

Предложение-определение 36.5. Пусть $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует интеграл

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy;$$

при этом функция $x \mapsto (f*g)(x)$, называемая *сверткой* функций f и g, также лежит в $L^(\mathbb{R}^n)$; имеет место неравенство $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Доказательство. Все эти утверждения немедленно следуют из теоремы Фубини. Именно, имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|dxdy = \int dy \int |f(x-y)|\cdot|g(y)|dx =$$
$$= \int |g(y)|dy \underbrace{\left(\int |f(x-y)|dx\right)}_{\|f\|_1} = \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 < \infty \quad (36.1)$$

(мы воспользовались тем, что мера Лебега инвариантна относительно сдвигов). Теперь утверждение о том, что $(f*g)(x)$ определено при всех x, немедленно вытекает из теоремы Фубини, а утверждение о том, что $f*g \in L^1$, вместе с неравенством $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$, сразу же получается из (36.1). $\square$

Основное утверждение о связи преобразования Фурье со сверткой выглядит так.

Предложение 36.6. *Если* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *то* $\widehat{(f*g)} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ *(преобразование Фурье переводит свертку в произведение).*

Доказательство. Это также непосредственно вытекает из теоремы Фубини:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(\xi) e^{-i\langle x,\xi\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} e^{-i\langle y,\xi\rangle} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y,\xi\rangle} g(y) dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y,\xi\rangle} f(x-y) dx = \hat{g}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi)$$

(перестановка интегралов законна ввиду неравенства (36.1)). $\square$

Приложение. Ряд Фурье как аналог преобразования Фурье

Теория преобразования Фурье на $\mathbb{R}^n$ является частным случаем более общей теории, относящейся к произвольным локально компактным абелевым группам. Изложить эту теорию в нашем курсе мы не можем; в этом приложении мы расскажем (очень сжато), как с точки зрения общей теории выглядят ряды Фурье.

Обозначим через $\mathbb{T}$ группу (мультипликативную) комплексных чисел, равных по модулю единице; отображение $x \mapsto e^{ix}$, где $x \in \mathbb{R}$, задает изоморфизм этой группы с $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; благодаря этому изоморфизму функции на $\mathbb{T}$ отождествляются с 2π-периодическими функциями на $\mathbb{R}$.

Обозначим через $\hat{\mathbb{T}}$ группу, состоящую из *характеров* группы $\mathbb{T}$, то есть непрерывных отображений из $\mathbb{T}$ в $\mathbb{T}$. Можно показать, что всякий характер группы $\mathbb{T}$ имеет вид $\chi_n \colon z \mapsto z^n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\hat{\mathbb{T}} \simeq \mathbb{Z}$ (ранее мы отмечали, что $\widehat{\mathbb{R}^n} \simeq \mathbb{R}^n$). Напротив, всякий характер группы $\mathbb{Z}$ (рассматриваемой с дискретной топологией) полностью определяется образом элемента $1 \in \mathbb{Z}$; поэтому такой характер имеет вид $n \mapsto z^n$ для некоторого фиксированного $z \in \mathbb{T}$; иными словами,

$\hat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}$. (Это частные случаи общего факта, называемого «двойственностью Понтрягина»: если G — локально компактная абелева группа, то $\hat{\hat{G}}$ канонически изоморфно G.)

Введем на $\mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}$ меры, инвариантные относительно сдвигов. Мера на $\mathbb{Z}$ будет бесхитростная: все подмножества измеримы, мера множества равна количеству его элементов. В качестве меры на $\mathbb{T}$ выберем меру Лебега; аккуратнее говоря, если отображение $p\colon [0;2\pi) \to \mathbb{T}$ задано формулой $x \mapsto e^{ix}$, то множество $E \subset \mathbb{T}$ назовем измеримым, если измеримо множество $p^{-1}(E) \subset \mathbb{R}$; мерой множества $E \subset \mathbb{T}$ будем называть лебеговскую меру множества $p^{-1}(E)$ (обычную, без деления на $\sqrt{2\pi}$). Ясно, что определенная таким образом мера на $\mathbb{T}$ инвариантна относительно сдвигов. Разделим эту меру на 2π; полученную в результате меру на $\mathbb{T}$ будем обозначать μ. Имеем $\mu(\mathbb{T}) = 1$. Пространство бесконечно гладких функций на $\mathbb{T}$ плотно в $L^1(\mathbb{T}, \mu)$ и в $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ (доказательство предложения 34.15 проходит с тривиальными изменениями).

Нам еще понадобятся пространства $L^1(\mathbb{Z})$ и $L^2(\mathbb{Z})$; ясно, что первое из них — это пространство абсолютно сходящихся рядов, а второе — пространство рядов, у которых сходится ряд из квадратов модулей (внимание: члены рядов пронумерованы целыми числами, а не натуральными). Более традиционные обозначения для этих пространств — ℓ^1 и ℓ^2 соответственно.

Теперь для всякой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ определим ее преобразование Фурье — функцию $\hat{f}$. Это будет функция на группе характеров группы $\mathbb{T}$, то есть на $\mathbb{Z}$, задаваемая такой формулой:

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(x)\chi_{-n}(x)\,d\mu(x);$$

если рассматривать f как 2π-периодическую функцию на $\mathbb{R}$, то

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Числа $\hat{f}(n)$ называются *коэффициентами Фурье* функции f.

Обратно, рассмотрим произвольную функцию из $L^1(\mathbb{Z})$, то есть абсолютно сходящийся ряд $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$; ее преобразованием Фурье назовем функцию $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\chi_n = \sum_n a_n e^{inx}$ (проявляя непоследовательность, мы определили преобразование Фурье в направлении «от $\mathbb{Z}$ к $\mathbb{T}$ » без знака «минус» перед характером, то есть элементом группы $\mathbb{T}$; для случая $\mathbb{R}^n$ это было бы преобразование $f \mapsto \check{f}$). Ввиду абсолютной сходимости ряда $\{a_n\}$ получаемая функция непрерывна на $\mathbb{T}$.

При исследовании свойств определенных таким образом преобразований фурье нам будет удобнее начать сразу с L^2-ситуации.

Заметим, во-первых, что $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ (так что специально определять преобразование Фурье на L^2 в данном случае не надо). Следующее утверждение является аналогом теоремы Планшереля для случая рядов Фурье (и частным случаем общей теоремы Планшереля).

Теорема 36.7. *Отображение F, ставящее в соответствие функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ последовательность чисел $\{\hat{f}(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, является изометрическим изоморфизмом из $L^2(\mathbb{T})$ в $L^2(\mathbb{Z}) = \ell^2$.*

Доказательство. Покажем сначала, что $F(f) \in \ell^2$, то есть что $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 < \infty$ при $f \in L^2(\mathcal{T})$. Для этого заметим, что характеры χ_n образуют ортонормированную систему в L^2: $(\chi_m, \chi_n) = 0$ при $m \neq n$ и $(\chi_n, \chi_n) = 1$ (проверка сводится к вычислению интегралов вида $\frac{1}{2\pi}\int^{2\pi})0 e^{i(m-n)x}\,dx)$. Теперь для всякого натурального n обозначим через $V_n \subset L^2(\mathbb{T})$ подпространство, порожденное характерами χ_k при $|k| \leqslant n$; ввиду ортонормальности характеров пространство V_n изометрически изоморфно пространству $\mathbb{C}^{2n+1}$ со стандартной эрмитовой метрикой и тем самым полно; следовательно, V_n замкнуто в $L^2(\mathbb{T})$ (на самом деле замкнутым является всякое конечномерное подпространство в полном нормированном пространстве). Если теперь $f \in L^2(\mathbb{T})$, то обозначим через g ортогональную проекцию f на V_n; поскольку $(g, \chi_j) = (f, \chi_j)$ при $|j| \leqslant n$, имеем $g = \sum_{|k|\leqslant n} \hat{f}(k)$; ввиду ортонормальности характеров имеем $\|g\|^2 = \sum_{|k|\leqslant n} |\hat{f}(n)|^2$; с другой стороны, по построению $\|g\| \leqslant \|f\|$. Стало быть,

$$\sum_{|k|\leqslant n} |\hat{f}(n)|^2 \leqslant \|f\|^2 < \infty;$$

ввиду произвольности n отсюда вытекает, что $F(f) \in \ell^2$.

Итак, мы показали, что F — отображение из $L^2(\mathbb{T})$ в $L^2(\mathbb{Z})$. Построим теперь отображение $\Sigma\colon L^2(\mathbb{Z}) \to L^(\mathbb{T})$, которое окажется обратным к F. Именно, для каждой последовательности $a = \{a_n\} \in L^2(\mathbb{Z})$ положим $\Sigma(a) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\chi_n$, где сумма ряда рассматривается в пространстве $L^2(\mathbb{T})$. Надо проверить, что этот ряд сходится в $L^2(\mathbb{T})$; это вытекает из ортонормальности характеров, так как

$$\left\| \sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2} a_n\chi_n \right\| = \sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2} |a_n|^2$$

и $a \in L^2(\mathbb{Z})$.

Из того же вычисления вытекает, что Σ — изометрия, а из ортонормальности характеров ясно, что $F \circ \Sigma = \mathrm{Id}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\Sigma(L^2(\mathbb{Z})) = L^2(T)$.

Чтобы в этом убедиться, заметим, что, коль скоро Σ — изометрия а $L^2(\mathbb{Z})$ полно, подпространство $\Sigma(L^2(\mathbb{Z})) \subset L^2(\mathbb{T})$ также полно и тем самым замкнуто; поэтому достаточно проверить, что $\Sigma(L^2(\mathbb{Z}))$ плотно в $L^2(\mathbb{T})$. Поскольку пространство $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций на $\mathbb{T}$ плотно в $L^2(\mathbb{T})$, достаточно проверить, что пространство конечных линейных комбинаций характеров (такие комбинации называются тригонометрическими многочленами) плотно в $C(\mathbb{T})$ в L^2-норме; наконец, поскольку из равномерной сходимости функций на $\mathbb{T}$ вытекает сходимость в L^2-норме, достаточно проверить, что тригонометрические многочлены плотны в $C(\mathbb{T})$ в sup-норме. Существует не менее двух разных и равно поучительных способа доказать этот факта (ключевые слова — «теорема Стоуна–Вейерштрасса» или «ядро Фейера»); предлагаем изучить эти доказательства самостоятельно по литературе. □

В заключение приведем один из возможных аналогов формулы обращения преобразования Фурье.

Предложение 36.8. *Если $f \in C^2(\mathbb{R})$ — периодическая функция с периодом 2π, то $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}$ для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Будем рассматривать f как C^2-функцию на $\mathbb{T}$. Заметим, что если f непрерывна (и вообще, если $f \in L^2(\mathbb{T})$), то $\lim_{|n|\to\infty} \hat{f}(n) = 0$ (так как $\sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty$). Далее, если $f \in C^1(\mathbb{T})$, то $\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$ (это проверяется тем же вычислением, что и предложение 35.2б). Сопоставляя эти два обстоятельства, получаем, что если $f \in C^2(\mathbb{T})$, то $|\hat{f}(n) = o(1/n^2)|$, откуда вытекает, что ряд

$$\sum \hat{f}(n)\chi_n = \sum \hat{f}(n)e^{inx}$$

абсолютно и равномерно сходится к некоторой непрерывной функции f_1; поскольку равномерная сходимость на $\mathbb{T}$ влечет сходимость в L^2-норме, так что этот ряд сходится к f_1 и в L^2. Однако теорема 36.7 показывает, что это ряд сходится в L^2-норме именно к f. Стало быть, $f_1 = f$ и все доказано. □