Лекция 37. Распределения, они же обобщенные функции

Формализм распределений дает возможность (в определенных случаях) дифференцировать негладкие функций; мы ею воспользуемся, когда будем работать с эллиптическими уравнениями. Начнем с определений.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество. Через $\mathcal{O}(U)$ будем обозначать пространство C^∞-функций на U, а $\mathcal{D}(U) \subset \mathcal{O}(U)$, как и раньше — подпространство, состоящее из C^∞-функций на $\mathbb{R}^n$ с компактными носителями, содержащимися в U.

Определение 37.1. Пусть $\{\varphi_n\}$ — последовательность функций из $\mathcal{D}(U)$. Будем говорить, что $\{\varphi_n\}$ сходится к функции $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, если выполнены следующие два условия:

а) существует такой компакт $K \subset U$, что $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ при всех n;

б) для всякого мультииндекса α последовательность $\{D^\alpha \varphi_n\}$ сходится к $D^\alpha \varphi$ равномерно на K.

(Мультииндекс α может быть и «пустым», так что, в частности, последовательность $\{\varphi_n\}$ должна равномерно сходиться к φ.)

Определение 37.2. *Распределением* на U называется линейный функционал $u\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$, удовлетворяющий следующему условию непрерывности: если $f_n \to f$ в смысле определения 37.1, то $u(f_n) \to u(f)$.

Пространство распределений на U обозначается $\mathcal{D}'(U)$.

(Не путайте с распределениями в смысле лекции 33.)

На самом деле на пространстве $\mathcal{D}(U)$ можно ввести такую (неметризуемую) топологию, что сходимость последовательностей определения 37.1 будет равносильна сходимости в этой топологии, а непрерывность линейного функционала на $\mathcal{D}(U)$ относительно этой топологии будет равносильна «непрерывности» в смысле определения 37.2. Наконец, на пространстве $\mathcal{D}'(U)$ также можно ввести естественную топологию. Для наших скромных целей все это не потребуется.

По-английски и по-французски распределения называются distributions. По-русски их часто называют «обобщенными функциями».

Всякую бесконечно гладкую функцию f можно рассматривать как распределение на U, если сопоставить ей функционал на $\mathcal{D}(U)$, действующий по правилу $\varphi \mapsto \int_U f\varphi dx$. Более общо, очевидно, что всякая функция $f \in L^1(U)$ задает распределение, действующее по той же формуле $\varphi \mapsto \int_U f\varphi dx$. Предложение 34.16 показывает, что эти соответствия задают вложения $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ и $L^1(U) \subset \mathcal{D}'(U)$.

Далее, пусть μ — мера на U, определенная на σ-алгебре борелевских множеств и конечная на компактах. Тогда соответствие $\varphi \mapsto \int_U f d\mu$ также, очевидно, является распределением на U, так что всякую «не очень плохую» меру также можно рассматривать как распределение. В частности, для всякой точки $x \in U$ функционал $\delta_x \colon \varphi \mapsto \varphi(x)$ является распределением; это распределение называется *дельта-функцией, сосредоточенной в точке x*.

Обобщая в другом направлении, обозначим через ${L_{\mathrm{loc}}}^1(U)$ (соотв. ${L_{\mathrm{loc}}}^2(U)$) пространство классов измеримых функций $f \colon U \to \mathbb{C}$ (с точностью до прибавления функции, равной нулю почти всюду), обладающих следующим свойством: для всякой точки $x \in U$ существует такая окрестность $V \ni x$, что $f|_V \in L^1(V)$ (напомним, что вертикальной чертой обозначается ограничение функции на подмножество). Ясно, что если $f \in {L_{\mathrm{loc}}}^1(U)$, то ограничение функции f на всякий компакт $K \subset U$ является суммируемой функцией; поэтому линейный функционал $\varphi \mapsto \int_U f\varphi dx$ является распределением на U; далее, поскольку при $\mu(V) < \infty$, имеем $L^2(V) \subset L^1(V)$, получаем, что ${L_{\mathrm{loc}}}^2(U) \subset {L_{\mathrm{loc}}}^1(U)$; тем самым имеем естественные вложения ${L_{\mathrm{loc}}}^1(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ и ${L_{\mathrm{loc}}}^2(U) \subset \mathcal{D}'(U)$. Наконец, поскольку, очевидно, $L^2(U) \subset {L_{\mathrm{loc}}}^2(U)$, имеем и вложение $L^2(U) \subset \mathcal{D}'(U)$.

В дальнейшем всякую бесконечно гладкую функцию, всякий элемент пространства ${L_{\mathrm{loc}}}^1(U)$ и пр. мы будем при необходимости рассматривать как распределение на U, не делая дальнейших оговорок.

Во всех приведенных до сих пор примерах распределения оставались бы непрерывными функционалами, даже если бы в пункте (б) определения 37.1 требовалась только равномерная сходимость $\varphi_n \to \varphi$ (как говорят, это были распределения порядка 0). С помощью важной операции дифференцирования распределений можно получить примеры распределений высших порядков.

Перед тем как дать определение дифференцирования, проведем такое вычисление. Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$, $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Тогда

$$\int_U \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi dx_1, \dots, dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi dx_1, \dots, dx_n = \\ = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f\varphi}{\partial x_j} dx_1, \dots, dx_n}_{0} - \int_{\mathbb{R}^n} f\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\varphi dx_1, \dots, dx_n \qquad (37.1)$$

(так как можно начать с интегрирования по x_j).

Этим мотивировано следующее определение.

Определение 37.3. Пусть $u \in \mathcal{D}'(U)$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Тогда через $\partial u/\partial x_j$ обозначается линейный функционал на $\mathcal{D}(U)$, заданный формулой

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \colon \varphi \mapsto -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right).$$

То, что $\partial u/\partial x_j$ действительно является распределением, проверяется тривиально (и при этой проверке уже используется условие со сходимостью производных). Формула 37.1 показывает, что ограничение операции дифференцирования на подпространство $\mathcal{O}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ совпадает с дифференцированием в обычном смысле.

Итак, распределения являются обобщениями гладких функций (в частности, они тоже образуют векторное пространство), и распределения, как и гладкие функции, можно дифференцировать. Впрочем, полного счастья не бывает: можно показать, что определить произведение распределений так, чтобы оно обобщало произведение функций и обладало разумными свойствами, уже невозможно. Можно все же определить произведение функции на распределение. Это делается так.

Предложение-определение 37.4. Пусть $f \in \mathcal{O}(U)$, $u \in \mathcal{D}'(U)$. Тогда линейный функционал $fu \colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$, заданный формулой

$$fu \colon \varphi \mapsto u(f\varphi),$$

является распределением на U.

Это распределение называется произведением f на u. Если $u \in \mathcal{O}(U)$, то произведения fu в смысле этого определения и в традиционном смысле совпадают.

Доказательство. Чтобы установить, что fu — распределение, достаточно проверить, что если $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(U)$, то $u(f\varphi_n) \to 0$, а для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что $f\varphi_n \to 0$, как только $\varphi_n \to 0$. Согласно определению 37.1, существует такой компакт $K \subset U$, что $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ для всех n. Ввиду формулы Лейбница, для всякого мультииндекса α существуют такие константы $C_{\beta\gamma}$, что

$$D^\alpha(f\varphi) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} C_{\beta\gamma} D^\beta f D^\gamma \varphi,$$

и из этой формулы требуемая сходимость очевидна, так как $|D^\beta f|$ ограничено на K для всех β. $\square$

Тривиально проверяется, что операция умножения функции на распределение удовлетворяет всем приличествующим случаю законам ассоциативности и дистрибутивности (аккуратнее говоря, относительно этого умножения распределения образуют модуль над кольцом функций).

Тривиальная проверка следующего утверждения предоставляется читателю.

Предложение 37.5. *Если $f \in \mathcal{O}(U)$, $u \in \mathcal{D}'(U)$ и $1 <\leqslant j \leqslant n$, то*

$$\frac{\partial fu}{\partial x_j} = f \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot u.$$

Иными словами, для произведения функции и распределения выполнена формула Лейбница.

Еще одна операция над функциями, которая обобщается на распределения, — это ограничение на открытое подмножество.

Именно, пусть $V \subset U$. Тогда имеется естественное вложение $i\colon \mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$, причем очевидно, что оно «непрерывно» в том смысле, что сходящиеся в смысле определения 37.1 последовательности переходят в сходящиеся. Поэтому, если $u\colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C}$ — распределение, то $u \circ i\colon \mathcal{D}(V) \to \mathbb{C}$ — также распределение.

Определение 37.6. Пусть $V \subset U$ — два открытых множества и $u \in \mathcal{D}'(U)$. Тогда композиция $u \circ i$, где $i\colon \mathcal{D}(V) \hookrightarrow \mathcal{D}(U)$ — естественное вложение, называется *ограничением* распределения u на подмножество V; ограничение обозначается $u|_V$.

Ясно, что в случае, когда u — функция на U (гладкая, суммируемая и т. п.), ограничение $u|V$ совпадает с ограничением $f|V$.

Предложение 37.7. а) *Пусть открытое множество V представлено в виде объединения открытых подмножеств $V = \bigcup V_j$. Если распределение $u \in \mathcal{D}'(V)$ таково, что $u|_{V_j} = 0$ для всех j, то $u = 0$.*

б) *Пусть открытое множество V представлено в виде объединения открытых подмножеств $V = \bigcup V_j$. Если для каждого V_j задано распределение $u_j \in \mathcal{D}'(V_j)$ таким образом, что $u_i|_{V_i \cap V_j} = u_j|_{V_i \cap V_j}$ для любых i и j, то существует и единственно такое распределение $u \in \mathcal{D}'(V)$, что $u|_{V_j} = u_j$ для всех j.*

Аналогичные утверждения для функций очевидны. На техническом языке это предложение означает, что распределения образуют *пучок*.

Доказательство. а) Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(V)$ и $K = \operatorname{supp}\varphi$. Тогда компакт K содержится в конечном объединении $V_{j_1} \cup \ldots \cup V_{j_k}$; из существования разбиения единицы вытекает, что $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_k$, где $\varphi_r \in \mathcal{D}(U)$ и $\operatorname{supp}\varphi_r \subset V_{j_r}$ для всех r. Теперь имеем

$$u(\varphi) = \sum_{r=1}^{k} u(\varphi_k) = \sum_{r=1}^{k} \left(u|_{V_{j_r}}(\varphi_r)\right);$$

так как все $u|_{V_{j_r}}$ равны нулю по условию, все слагаемые обращаются в нуль и $u(\varphi) = 0$; так как φ произвольна, все доказано.

б) Утверждение о единственности вытекает из пунтка (а); докажем существование.

Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(V)$; чтобы определить $u(\varphi)$, поступим следующим образом. Пусть $\operatorname{supp}\varphi$ содержится в комакте $K \subset V$. Тогда, опять из существоания разбиения единицы, получается, что существую такие функции $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \mathcal{D}(V)$, что $\psi_1 + \ldots + \psi_k = 1$ на K и при этом для всякого r найдется такой индекс j_r, что $\operatorname{supp}\psi_r \subset V_{j_r}$. Положим теперь $u(\varphi) = \sum_{r=1}^{k} u_{j_r}(\psi_r\varphi)$.

Ясно, что если $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ для всех n и $\varphi_n \to 0$ в $\mathcal{D}(V)$, то $\psi_r\varphi_n$ стремится к нулю в $\mathcal{D}(V_{j_r})$ для всякого r, откуда $u(\varphi_r) \to 0$. Таким образом, чтобы проверить, что u действительно является распределением, остается только убедиться, что это определение корректно, то есть не зависит от выбора K и φ_r. Сделаем это.

Пусть $\operatorname{supp}\varphi$ содержится еще в компакте K', и пусть сущестувют такие функции $\eta_1, \ldots, \eta_l \in \mathcal{D}(V)$ и индексы $h_1, \ldots, h_l$, что $\sum \eta_m = 1$ на K' и $\operatorname{supp}\eta_m \subset V_{h_m}$. Для всяких $r \in [1; k]$ и $m \in [1; l]$ имеем по условию

$$u_{j_r}|_{V_{j_r} \cap V_{h_m}} = u_{h_m}|_{V_{j_r} \cap V_{h_m}},$$

откуда $u_{j_r}(\eta_m\psi_r\varphi) = u_{h_m}(\eta_m\psi_r\varphi)$. Имея это равенство в виду, запишем такую цепочку равенств:

$$\sum_{r=1}^{k} u_{j_r}(\psi_r\varphi) = \sum_{r=1}^{k} u_{j_r}\left(\sum_{m=1}^{l} \eta_m\psi_r\varphi\right) = \sum_{r,m} u_{j_r}(\eta_m\psi_r\varphi) =$$
$$= \sum_{r,m} u_{h_m}(\eta_m\psi_r\varphi) = \sum_{m} u_{h_m}\left(\sum_{r} \eta_m\psi_r\varphi\right) = \sum_{m=1}^{l} u_{h_m}(\eta_m\varphi).$$

Этим доказана корректность.

Остается проверить, что $u|_{V_j} = u_j$, то есть что $u(\varphi) = u_j(\varphi)$, как только $\operatorname{supp}\varphi \subset V_j$. Для этого положим $K = \operatorname{supp}\varphi$, $r = 1$, а в качестве ψ_1 возьмем гладкую функцию с носителем, содержащимся в V_j, тождественно равную единице на K. Ввиду только что проверенной корректности определения u имеем $u(\varphi) = u_j(\psi_1\varphi) = u_j(\varphi)$. $\square$