Лекция 38. Пространства Соболева

Пункты (б) и (в) предложения 35.2 наводят на мысль, что чем более гладка функция на $\mathbb{R}^n$, тем быстрее убывает на бесконечности ее преобразование Фурье (и обратно). Эти соображения можно доводить до точных утверждений разными способами; формализм пространств Соболева — один из них. На первый взгляд он выглядит несколько вычурно, но технически очень удобен.

Напомним, что если $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$, то $|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$.

Определение 38.1. Для всякого $s \in \mathbb{R}$ обозначим через μ_s меру на $\mathbb{R}^n$, определенную на σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств и заданную формулой

$$\mu_s(E) = \int_E (1 + |\xi|^2)^s d\mu(\xi),$$

где μ, как и ранее — мера Лебега, деленная на $(2\pi)^{n/2}$.

Мера μ_s называется *соболевской мерой.* Ясно, что $\mu_0 = \mu$, и легко видеть, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ (см. доказательство предложения 34.15). Ясно также, что $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s) \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mu_t)$ при $s > t$.

Лемма 38.2. *Если ψ — шварцевская функция на $\mathbb{R}^n$ и $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, то произведение $f\psi$ суммируемо относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^c d\mu(\xi) < \infty$ тогда и только тогда, когда $c < -n$. Поскольку $(1 + |\xi|)^c \sim (1 + |\xi|^2)^{c/2}$ при $|\xi| \to +\infty$, получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s d\mu(\xi) < \infty \Leftrightarrow s < -n/2. \tag{38.1}$$

Пусть теперь $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$; по определению, это равносильно тому, что $f(\xi)(1 + |\xi|^2)^{s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Так как функция ψ шварцевская, существует такая константа $C > 0$, что $|\psi(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s} \leqslant C \cdot (1+|\xi|)^{-n/2-1}$. Следовательно, $\psi(\xi)(1+|\xi|^2)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$; умножая на $f(\xi)(1+|\xi|^2)^{s/2}$ и пользуясь тем, что произведение двух L^2-функций суммируемо, получаем искомое. □

Теперь всякой функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ мы следующим образом сопоставим распределение $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, которое следует рассматривать как «преобразование Фурье» функции f: для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ положим (ориентируясь на формулу 35.9):

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} \cdot f d\mu. \tag{38.2}$$

Предложение 38.3. *Отображение, заданное формулой* (38.2), *корректно определено и является распределением.*

Доказательство. Поскольку $\hat{\varphi}$ — шварцевская функция, интеграл в правой части существует по лемме 38.2. Остается показать, что функционал u непрерывен в смысле определения 38.2. В самом деле, пусть $\{\varphi_m\}$ — сходящаяся к нулю последовательность функций из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, носители которых содержатся в компакте $K \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку $\mu(K) < \infty$ и $D^\alpha \varphi_m \to 0$ равномерно на K для любого мультииндекса α, последовательность $D^\alpha \varphi_m$ сходится к нулю и в $L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$. Следовательно (см. предложение 35.2), для всякого мультииндекса α последовательность $\xi^\alpha \hat{\varphi}_m$ сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}^n$; отсюда следует, что и последовательность $(1+|\xi|^2)^t \hat{\varphi}_m(\xi)$ равномерно стремится к нулю для всякого $t \in \mathbb{R}$. В частности, существует такая последовательность $\varepsilon_m \to 0$, что

$$(1 + |\xi|^2)^{-s/2+n/2+1} \hat{\varphi}_m(\xi) \leqslant \varepsilon_m$$

для всякого m и всякого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно,

$$|\hat{\varphi}_m(\xi) \cdot f(\xi)| = |\hat{\varphi}_m(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-s/2}| \cdot |f(\xi) \cdot (1 + |\xi|)^{s/2}| \leqslant \\ \leqslant \varepsilon_m \cdot |f(\xi) \cdot (1 + |\xi|)^{s/2}| \cdot (1 + |\xi|^2)^{-n/2-1}.$$

Так как в правой части этого неравенства оба непостоянных сомножителя лежат в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, правая часть суммируема относительно обычной меры Лебега; теперь равенство $\lim \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}_m \cdot f = 0$ вытекает из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. □

Распределение u, соответствующее функции $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ по формуле (38.2), будем обозначать через $\hat{f}$. Ясно, что если f — шварцевская функция, то $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ для всех $s \in \mathbb{R}$; предложение 35.9 показывает, что в этом смысле распределение $\hat{f}$, определенное формулой (38.2), совпадает с преобразованием Фурье функции f в обычном смысле. По этой причине распределение $u = \hat{f}$ будет называться преобразованием Фурье функции f. Напротив, ввиду формулы обращения функцию $\check{f}$ естественно рассматривать как преобразование Фурье распределения u.

Предложение 38.4. *Линейное отображение* $f \mapsto \hat{f}$ *из* $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ *в* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *является инъективным.*

Доказательство. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, и пусть $\int \hat{\varphi} \cdot f d\mu(\xi) = 0$ для всякой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; покажем, для начала, что $\int \hat{\psi} \cdot f d\mu(\xi) = 0$ для всякой шварцевской функции ψ. В самом деле, пусть функция $\eta_m \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

принимает значения из отрезка $[0;1]$ и равна единице на шаре радиуса m с центром в начале координат. Тогда из теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что $\eta_m\psi \to \psi$ в L^1-метрике (относительно обычной меры Лебега). Следовательно, последовательность $\widehat{\eta_m\psi}$ равномерно сходится в $\hat{\psi}$ (ввиду предложения 35.2a$'$); поэтому $\int \hat{\psi} \cdot f d\mu(\xi) = \lim_{m\to\infty} \int \widehat{\eta_m\psi} \cdot f d\mu(\xi)$ опять-таки по теореме об ограниченной сходимости; так как каждая из функций $\eta_m\psi$ лежит в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$, имеем по условию $\int \widehat{\eta_m\psi} \cdot f d\mu = 0$, так что $\int \hat{\psi} \cdot f d\mu = 0$. Так как преобразование Фурье отображает пространство Шварца на пространство Шварца, имеем $\int \lambda f d\mu = 0$ для всякой шварцевской функции λ и, в частности, для всякой функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $f = 0$. □

Теперь мы можем определить пространства Соболева.

Определение 38.5. Пусть $s \in \mathbb{R}$. Тогда *пространством Соболева* $H_s \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется образ пространства $L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$ относительно отображения $f \mapsto \hat{f}$, заданного формулой (38.2).

Ясно, что $H_t \subset H_s$ при $t > s$.

Пространства H_s для неотрицательных s охарактеризовать совсем просто.

Предложение 38.6. *При $s \geqslant 0$ пространство Соболева H_s состоит из преобразований Фурье (в смысле Планшереля) от функций из $L^2(\mu_s) \subset L^2(\mu)$.*

Доказательство. Ввиду L^2-изометричности преобразования Фурье, предложение 35.9 остается верным, если $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а преобразование Фурье понимается в смысле Планшереля. Дальнейшее очевидно. □

Если распределение u лежит в пространстве Соболева H_t, то, неформально говоря, следует считать, что u «тем более гладко», чем больше t. Сейчас мы приведем два точных результата, призванных подтвердить эти интуитивные представления. Первый из этих результатов показывает, что при достаточно больших t распределения $u \in H_t$ являются самыми настоящими гладкими функциями.

Предложение 38.7 (Лемма Соболева). *Пусть r — целое неотрицательное число, $s > r + (n/2)$ и H_s — пространство Соболева на $\mathbb{R}^n$. Тогда $H_s \subset C^r(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Пусть $u = \hat{f} \in H_s$, где $f \in L^2(\mu_s)$. Покажем, что $\xi^\alpha f \in L^1(\mu)$ для всякого мультииндекса α, удовлетворяющего условию $|\alpha| \leqslant r$. В самом деле, $|\xi^\alpha| \leqslant |\xi|^|\alpha|$, откуда при $|\alpha| \leqslant r$ имеем $|\xi^\alpha| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{r/2}$ для некоторой константы C. Теперь запишем неравенства

$$|\xi^\alpha f| \leqslant C(1+|\xi|^2)^{r/2}|f| = C(1+|\xi|^2)^{\frac{r}{2}-\frac{s}{2}} \cdot |f|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}.$$

В правой части первый сомножитель лежит в $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$ ввиду (38.1), а второй — поскольку по условию $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$. Стало быть, их произведение лежит в L^1, и тем более это верно для $\xi^\alpha f$.

Поскольку в нашем случае $L^2(\mu_s) \subset L^2(\mu)$, предложение 38.6 в совокупности с примененным $|\alpha|$ раз предложением 35.2 (и с тем фактом, что для функций из $L^2 \cap L^1$ преобразования Фурье в исходном смысле и в смысле Планшереля совпадают), показывает, что функция $u = \hat{f}$ лежит в $C^r(\mathbb{R}^n)$. □

Еще одна характеризация пространств Соболева, также свидетельствующая о связи принадлежности к пространству Соболева и гладкости, относится только к пространствам H_r для целых положительных r.

Предложение 38.8. *Пусть r — натуральное число. Тогда*

$$H_r = \{f \in L^2(\mu) \mid D^\alpha f \in L^2(\mu) \qquad \textit{при } |\alpha| \leqslant r\}.$$

Доказательство. Пусть $u \in H_r$; тогда $u = \hat{f}$, где $f \in L^2(\mu_r) \subset L^2(\mu)$. Пусть α — произвольный мультииндекс. Тогда для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}u(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int f \cdot (\widehat{D^\alpha\varphi})d\xi = (-i)^{|\alpha|}\int \xi^\alpha f \cdot \hat{\psi} d\xi, \tag{38.3}$$

Если теперь $|\alpha| \leqslant r$, то $|\xi^\alpha|^2 = O(1+|\xi|^2)^r$; поскольку $f \in L^(\mu_r)$, отсюда следует, что $\xi^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$, так что из (38.3) и равенства Парсеваля имеем

$$(D^\alpha u)(\varphi) = (-i)^{|\alpha|}\int (\widehat{\xi^\alpha f})\varphi dx,$$

где преобразование Фурье понимается по Планшерелю; тем самым $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть, напротив, $D^\alpha u \in L^2$ при $|\alpha| \leqslant r$. Беря от $D^\alpha u$ преобразование Фурье, получаем, что $\xi^\alpha \hat{u} \in L^2$ при $|\alpha| \leqslant r$. Поскольку

$$(1+|\xi|^2)^r \leqslant \mathrm{const} \cdot \sum_{|\alpha| \leqslant r} |\xi^\alpha|^2,$$

отсюда вытекает, что $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_r)$; теперь предложение 38.6 вкупе с формулой обращения показывает, что $u \in H_r$. $\square$

Вот еще одно совсем простое утверждение, также свидетельствующее о связи пространств Соболева с гладкостью.

Предложение 38.9. *Если $u \in H_s$, то $\partial u/\partial x_j \in H_{s-1}$ для всякого j.*

Доказательство. Если $u = \hat{f}$, где $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(\varphi) = -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi_j f) \cdot \varphi d\mu.$$

Осталось заметить, что если $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_s)$, то $\xi_j f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu_{s-1})$, поскольку $|\xi_j|^2 \leqslant 1 + |\xi|^2$. $\square$

Принадлежность к пространству H_s при данном s характеризует не одну только только гладкость распределения: например, ненулевые константы, рассматриваемые в качестве распределений, вообще ни в одном пространстве H_s не лежат. Чтобы устранить этот недостаток, мы пространства Соболева локализуем. Эта конструкция основана на следующем факте.

Предложение 38.10. *Если $u \in H_s$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, то $\varphi u \in H_s$.*

Доказательство. Для простоты ограничимся случаем, когда s — натуральное число. Тогда можно воспользоваться предложением 38.8. По условию, $D^\alpha u \in L^2$ при $|\alpha| \leqslant s$; с другой стороны, ввиду формулы Лейбница при $|\alpha| \leqslant s$ имеем $D^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta,\gamma} C_{\beta\gamma} D^\beta \varphi D^\gamma u$, где $|\gamma| \leqslant s$; поскольку произведение непрерывной функции с компактным носителем на функцию из L^2 принадлежит L^2, имеем $D^\alpha(\varphi u) \in L^2$ при $|\alpha| \leqslant s$, и все доказано. $\square$

Теперь мы можем дать определение локальных пространств Соболева. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество. Если $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ и $u \in \mathcal{D}'(U)$, то произведение $\varphi \cdot u$ можно рассматривать как распределение на $\mathbb{R}^n$, если положить $(\varphi u)(\psi) = u(\varphi\psi)$ для всякой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (это частный случай конструкции «продолжение нулем распределения с компактным носителем»). Далее при необходимости мы будем рассматривать такие произведения как распределения на всем $\mathbb{R}^n$, не делая дополнительных оговорок.

Предложение-определение 38.11. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $u \in \mathcal{D}'(U)$ и $s \in \mathbb{R}$. Тогда следующие два условия эквивалентны.

а) Для всякой $x \in U$ существует открытое множество $V \ni x$, $V \subset U$ и такое распределение $w \in H_s$, что $w|_V = u|_V$.

б) Для всякой $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ имеем $\varphi u \in H_s$.

Если выполняются эти условия, то говорят, что распределение *u локально принадлежит к* H_s. Пространство распределений на U, локально принадлежащих к H_s, будем обозначать $H_{s,\mathrm{loc}}$.

Доказательство. (б) $\Rightarrow$ (а). Для данной точки $x \in U$ рассмотрим функцию $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, тождественно равную единице на некотором открытом множестве $V \ni x$. Имеем $\varphi u \in H_s$, и при этом $\varphi u|_V = \varphi|_V \cdot u|_V = 1 \cdot u|_V = u|_V$.

(а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $\operatorname{supp}\varphi = K$. Из условия (а) и существования разбиения единицы вытекает, что существуют такие открытые подмножества $V_1, \ldots, V_m \subset U$, функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \mathcal{D}(U)$ и распределения $w_1, \ldots, w_m \in H_s$, что $K \subset \bigcup V_j$, $\operatorname{supp}\varphi_j \subset V_j$ для всех j, $\sum \varphi_j = 1$ на K и $w_j|_{V_j} = u|_{V_j}$ для всех j. Теперь имеем $\varphi u = \sum(\varphi \cdot \varphi_j) \cdot u = \sum(\varphi \cdot \varphi_j) \cdot w_j$, и все $(\varphi \cdot \varphi_j) \cdot w_j$ лежат в H_s ввиду предложения 38.10. □

Следствие 38.12. *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ — *открытое множество,* r — *натуральное число и* $\varepsilon > 0$. *Тогда* $C^r(U) \subset H_{r,\mathrm{loc}}(U)$ *и* $H_{r+n/2+\varepsilon,\mathrm{loc}} \subset C^r(U)$.

Доказательство. Второе включение следует из леммы Соболева, а первое — из 38.11 и предложения 38.8. □

Отметим в заключение, что, строго говоря, мы определили пространства $H_{s,\mathrm{loc}}$ только для натуральных значений s (поскольку только для таких s мы доказали предложение 38.8); для доказательства основного результата следующей лекции этого достаточно.