Лекция 39. Эллиптические операторы

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество; всюду далее кольцо комплекснозначных C^∞-функций на U будет часто обозначаться не $\mathcal{O}(U)$, а просто $\mathcal{O}$.

Пусть d — некоторое натуральное число.

Определение 39.1. *Дифференциальным оператором* называется линейное отображение $L\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, заданное формулой

$$L\colon f \mapsto \sum p_\alpha D^\alpha f,$$

где $p_\alpha \in \mathcal{O}$ и α пробегает все мультииндексы веса $\leqslant d$.

Например, всякое векторное поле является дифференциальным оператором.

Так же, как и в случае векторных полей, нетрудно проверить, что функции p_α однозначно определяются оператором L. Мы этого делать не будем; читатель ничего не потеряет, если будет считать дифференциальным оператором формальное выражение вида $L = \sum p_\alpha D^\alpha$, где $p_\alpha \in \mathcal{O}$.

Дифференциальные операторы в смысле определения 39.1 называются еще *скалярными* дифференциальными операторами; ниже мы определим также матричные дифференциальные операторы.

Определение 39.2. *Порядком* дифференциального оператора $L = \sum p_\alpha D^\alpha$ называется максимальное k, для которого существует не равный тождественно нулю коэффициент p_α, где $|\alpha| = k$.

Иными словами, порядок — это максимальный порядок дифференцирования, входящего в оператор. Например, всякое (ненулевое) векторное поле имеет как дифференциальный оператор порядок 1.

Ясно, что дифференциальные операторы порядка, не превосходящего данного числа k, образуют векторное пространство; будем обозначать его через D_k. В частности, $D_0 = \mathcal{O}$, а операторы порядка 0 суть операторы умножения на функцию.

Определение 39.3. Пусть $L = \sum p_\alpha D^\alpha$ — дифференциальный оператор порядка d. Тогда его *символом* называется многочлен $\operatorname{Symb}(L) \in \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$, определяемый следующим образом:

$$\operatorname{Symb}(L) = \sum_{|\alpha|=d} p_\alpha \xi^\alpha.$$

Кольцо $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ — это просто кольцо многочленов над кольцом гладких функций; хотя функции комплекснозначны, переменные ξ_j следует мыслить вещественными (см. ниже определение 39.12). Подчеркнем, что символ дифференциального оператора зависит только от слагаемых максимального порядка (в частности, символ всегда является однородным многочленом).

Чтобы освоиться с этими определениями, докажем следующий простой, но важный факт.

Предложение 39.4. а) *Композиция двух дифференциальных операторов также является дифференциальным оператором; если $L_1 \in D_{k_1}$, $L_2 \in D_{k_2}$, то $L_1 \circ L_2 \in D_{k_1+k_2}$.*

б) *Если $L_1 = \sum p_\alpha D^\alpha \in D_{k_1}$, $L_2 = \sum q_\beta D^\beta \in D_{k_2}$ и композиция $L_1 \circ L_2$ имеет порядок k_1+k_2, то $\mathrm{Symb}(L_1 \circ L_2) = \mathrm{Symb}(L_1) \cdot \mathrm{Symb}(L_2)$; порядок композиции $L_1 \circ L_2$ меньше k_1+k_2 тогда и только тогда, когда произведение $\mathrm{Symb}(L_1) \cdot \mathrm{Symb}(L_2)$ тождественно равно нулю.*

в) *Если $L_1 \in D_{k_1}$, $L_2 \in D_{k_2}$, то коммутатор $[L_1, L_2]$ лежит в $D_{k_1+k_2-1}$.*

Утверждение (в) иллюстрируется тем известным нам фактом, что коммутатор двух векторных полей является векторным полем.

Доказательство. Тот факт, что композиция двух дифференциальных операторов — также дифференциальный оператор, немедленно следут из формулы Лейбница. Далее, если $L_1 = \sum p_\alpha D^\alpha \in D_{k_1}$, $L_2 = \sum q_\beta D^\beta \in D_{k_2}$ и $\varphi \in \mathcal{O}$, то из той же формулы Лейбница немедленно вытекает, что

$$L_1(L_2(\varphi)) = \sum_{\substack{|\alpha|=k_1\\|\beta|=k_2}} p_\alpha q_\beta D^{\alpha+\beta}\varphi + \binom{\text{слагаемые с производными}}{\text{меньшего порядка}},$$

откуда вытекают утверждения (а) и (б). Наконец, (в) немедленно следует из (б) и коммуттативности умножения многочленов. □

Дифференциальные операторы можно рассматривать не только как отображения из $\mathcal{O}(U) = C^\infty(U)$ в себя. Например, если L — дифференциальный оператор порядка d, то L действует и на функциях из $C^m(U)$ для всякого $m \geqslant d$ и является тем самым линейным отображением из $C^m(U)$ в $C^{m-d}(U)$; более того, поскольку распределения можно дифференцировать и умножать на гладкие функции, всякий дифференциальный оператор можно рассматривать и как отображение из $\mathcal{D}'(U)$ в

$\mathcal{D}'(U)$. Наконец, если L — дифференциальный оператор и $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, то $L\varphi$ также, очевидно, имеет компактный носитель, так что можно рассматривать L и как оператор на $\mathcal{D}(U)$; сейчас мы воспользуемся этим обстоятельством.

Именно, определим на $\mathcal{D}(U)$ эрмитово скалярное произведение по обычной формуле

$$(f, g) = \int_U f\bar{g}d\mu$$

(разумеется, это не что иное, как ограничение на $\mathcal{D}(U)$ скалярного произведения, заданного на L^2).

Пусть теперь L — дифференциальный оператор на U; будем рассматривать его как линейный оператор на $\mathcal{D}(U)$.

Предложение 39.5. *Оператор $L^*\colon \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}(U)$, сопряженный к L, является дифференциальным оператором; если*

$$L = \sum_{|\alpha| \leqslant d} p_\alpha D^\alpha,$$

то

$$L^* = \sum_{|\alpha| \leqslant d} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \circ \overline{p_\alpha}. \tag{39.1}$$

Напомним, что если L — линейный оператор на пространстве V с эрмитовой метрикой $(\cdot, \cdot)$, то оператор L^* называется сопряженным к L, если $(Lu, v) = (u, L^*v)$ для всех $u, v \in L$. В правой части формулы (39.1) стоят композиции дифференцирований с операторами умножения на функцию.

Доказательство. Поскольку $(L_1 + L_2)^* = L_1^* + L_2^*$ и $(L_1 \circ L_2)^* = L_2^* \circ L_1^*$, причем в обеих формулах левая часть существует, если существуют L_1^* и L_2^*, достаточно установить существование дифференциальных операторов, сопряженных к операторам умножения на функции и к операторам D^α. Ввиду тождества $f\varphi \cdot \bar{\psi} = g \cdot \overline{f\psi}$, умножение на функцию $\bar{f}$ является оператором, сопряженным к оператору умножения на функцию f. Далее, если $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(U)$, то с помощью интегрирования по частям обычным образом получается тождество

$$\int_U \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \cdot \bar{\psi} dx_1, \ldots, dx_n = -\int_U \varphi \cdot \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x_n} dx_1, \ldots, dx_n =$$
$$= -\int_U \varphi \cdot \overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_n}\right)} dx_1, \ldots, dx_n,$$

так что оператор $-\partial/\partial x_j$ сопряжен к $\partial/\partial x_j$, так что оператор $(-1)^{|\alpha|}D^\alpha$ сопряжен к D^α. Отсюда немедленно следуют формула (39.1) и предложение. □

Следствие 39.6. *Если L — дифференциальный оператор порядка d, то L^* — тоже дифференциальный оператор порядка d; при этом* $\mathrm{Symb}(L^*) = (-1)^d\overline{\mathrm{Symb}(L)}$.

Черта над $\mathrm{Symb}(L)$ обозначает комплексное сопряжение:

$$\overline{\sum f_\alpha \xi^\alpha} = \sum \overline{f_\alpha}\xi^\alpha.$$

Доказательство. Это немедленно следует из формулы (39.1). □

Обобщением скалярных дифференциальных операторов являются матричные дифференциальные операторы.

Через $\mathcal{O}^k$, где k — натуральное число, будем обозначать прямую сумму k экземпляров пространства $\mathcal{O}$ (т.е. пространство наборов из k функций $f_1, \ldots, f_k$); аналогичный смысл будут иметь обозначения $(\mathcal{D}(U))^k$, $(\mathcal{D}'(U))^k$ и т. п.

Определение 39.7. Линейный оператор $L\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^l$ называется *(матричным) дифференциальным оператором*, если существует такая $l\times k$-матрица $\|L_{ij}\|$ из дифференциальных операторов в смысле определения 39.1, что

$$L(f_1, \ldots, f_k) = \left(\sum L_{1j}f_j, \ldots, \sum L_{lj}f_j\right).$$

В этом случае мы будем иногда писать $L = \|L_{ij}\|$.

Определения порядка и символа и простейшие свойства дифференциальных операторов выглядят в этом случае так.

Определение 39.8. Пусть $L = \|L_{ij}\|$ — матричный дифференциальный оператор из $\mathcal{O}^k$ в $\mathcal{O}^l$. Тогда его *порядком* называется максимум порядков операторов L_{ij}.

Если порядок оператора $L = \|L_{ij}\|$ равен d, то его *символом* называется $l\times k$-матрица $\|P_{ij}\|$, состоящая из элементов кольца $\mathcal{O}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, где

$$P_{ij} = \begin{cases} \mathrm{Symb}\, L_{ij}, & \text{если порядок } L_{ij} \text{ равен } d,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Предложение 39.9. а) *Если* $L_1\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^l$ *— дифференциальный оператор порядка* d_1, *а* $L_2\colon \mathcal{O}^l \to \mathcal{O}^m$ *— дифференциальный оператор порядка* d_2, *то* $L_2 \circ L_1\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^m$ *— дифференциальный оператор порядка* $\leqslant d_1 + d_2$. *Если его порядок в точности равен* $d_1 + d_2$, *то* $\mathrm{Symb}(L_2 \circ L_1) = \mathrm{Symb}(L_2)\,\mathrm{Symb}(L_1)$ *(умножение матриц). Порядок композиции* $L_1 \circ L_2$ *меньше* $d_1 + d_2$ *тогда и только тогда, когда произведение* $\mathrm{Symb}(L_1)\,\mathrm{Symb}(L_2)$ *тождественно равно нулю.*

Доказательства очевидны ввиду предложения 39.4.

Предложение 39.10. *Если* $L\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^l$ *— дифференциальный оператор порядка* d, *и если* $u \in H_{s,\mathrm{loc}}(U)^k$, *то* $Lu \in H_{s-d,\mathrm{loc}}(U)^l$.

Доказательство. Ввиду предложения 38.9 дифференцирование уменьшает номер пространства Соболева на единицу, а ввиду предложения 38.10 умножение на бесконечно гладкую функцию номера пространства Соболева не меняет. $\square$

Понятие сопряженного оператора в матричном случае выглядит следующим образом. Эрмитово скалярное произведение на $\mathcal{D}(U)^k$ задается формулой

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_k) = (\varphi_1, \psi_1) + \dots + (\varphi_k, \psi_k).$$

Матричный дифференциальный оператор, сопряженный относительно этого скалярного произведения, описывается так.

Предложение 39.11. *Пусть* $L\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^l$ *— матричный дифференциальный оператор, заданный матрицей* $\|L_{ij}\|$. *Тогда оператор* $L^*\colon \mathcal{O}^l \to \mathcal{O}^k$, *заданный матрицей* $\|L^*_{ji}\|$ *(транспонированная матрица из сопряженных операторов) является сопряженным к* L *в том смысле, что*

$$(L\varphi, \psi) = (\varphi, L^*\psi)$$

для всяких $\varphi \in \mathcal{D}(U)^k$ *и* $\psi \in \mathcal{D}(U)^l$.

Порядки операторов L *и* L^* *совпадают. Имеем* $\mathrm{Symb}(L^*) = (-1)^{d}\,{}^{t}\overline{\mathrm{Symb}(L)}$ *(матрица, сопряженная к транспонированной), где* d *— порядок оператора и для* $P = \sum p_\alpha \xi^\alpha \in \mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_n]$ *полагаем* $\bar{P} = \sum \overline{p_\alpha} \xi^\alpha$.

Доказательство с очевидностью вытекает из предложения 39.5 и следствия 39.6.

Приведем некоторые примеры.

Как мы уже отмечали, всякое векторное поле $\sum f_i(x)(\partial/\partial\xi_i)$ является дифференциальным оператором; если оно не является тождественным нулем, то его порядок равен 1, а символ равен $\sum p_i(x)\xi_i$.

Оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^n}{\partial x_n^2}$$

на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *оператором Лапласа*; его порядок равен 2, а символ равен $\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$.

А вот пример ситуации, в которой естественно возникает матричный дифференциальный оператор. Пусть $U \subset \mathbb{C}$ — открытое множество и $f\colon U \to \mathbb{C}$ — отображение класса C^1. Давайте выясним, при каких условиях для всякой точки $p \in \mathbb{C}$ производная $f'(p)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является не просто $\mathbb{R}$-линейным, но комплексно-линейным отображением (иными словами, совпадает с умножением на некоторое комплексное число). Если записать $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, то якобиан отображения равен

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix};$$

с другой стороны, $\mathbb{R}$-линейное отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$ является $\mathbb{C}$-линейным тогда и только тогда, когда его матрица имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$. Поэтому наше условие на отображение $f = u + iv$ равносильно следующим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эта система уравнений называется *уравнениями Коши–Римана*, а оператор, действующий по правилу

$$L\colon (u,v) \mapsto \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

называется *оператором Коши–Римана*.

В курсе комплекснного анализа вы узнаете, что всякое C^1-отображение, удовлетворяющее уравнениям Коши–Римана, является на самом деле комплексно-аналитической и тем самым бемконечно дифференцируемой; можно показать, что бесконечно дифференцируема и всякая C^2-функция f, удовлетворяющая *уравнению Лапласа* $\Delta f = 0$. Иными словами, решения этих уравнений оказываются более гладкими, чем можно было бы ожидать a priori.

Конечно, это повышение гладкости имеет место не всегда. Например, если L — векторное поле, то функция, удовлетворяющая уравнению

$Lf = 0$ (то есть постоянная на фазовых кривых) гладкой быть, конечно, не обязана. Еще один пример подобного рода дает «волновой оператор» $\partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial t^2$ на $\mathbb{R}^2$: если f — произвольная дважды дифференцируемая функция одного переменного, то функция $u\colon (x,t) \mapsto f(x+t)$ заведомо удволетворяет «волновому уравнению»

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

«Теорема регулярности», которой завершится эта лекция и весь курс, выделяет важный класс уравнений с частными производными, для которых имеет место эффект повышения гладкости.

Определение 39.12. Матричный дифференциальный оператор $L\colon \mathcal{O}^k(U) \to \mathcal{O}^l(U)$ называется *эллиптическим*, если его символ удовлетворяет следующему условию: для всякого $x \in U$ и всякого $\xi = \xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n \setminus (0, \dots, 0)$ умножение на матрицу $\mathrm{Symb}_{x,\xi}(L)$ задает инъективное линейное отображение из $\mathbb{C}^k$ в $\mathbb{C}^l$, где через $\mathrm{Symb}_{x,\xi}(L)$ обозначана матрица, получающаяся подстановкой в символ пары $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$.

В приведенных выше примерах операторы Лапласа и Коши–Римана являются, очевидно, эллиптическими, а волновой оператор, символ которого имеет вид $\xi^2 - \eta^2$, таковым не является. Не является эллиптическим и векторное поле (при $n > 1$).

Теорема 39.13 (теорема регулярности). *Пусть $L\colon C^\infty(U)^k \to C^\infty(U)^l$ — эллиптический оператор порядка d и $f \in C^d(U)^k$. Если $Lf \in C^\infty(U)^l$, то и $f \in C^\infty(U)^k$.*

Следствие 39.14. *Пусть $L\colon C^\infty(U)^k \to C^\infty(U)^l$ — эллиптический оператор порядка d и $f \in C^d(U)^k$. Если $Lf = 0$, то $f \in C^\infty(U)^k$.*

Теорема регулярности немедленно следует из следствия 38.12 и следующего более точного факта.

Предложение 39.15. *Пусть $L\colon C^\infty(U)^k \to C^\infty(U)^l$ — эллиптический оператор порядка d, и путь $u \in H_{t,\mathrm{loc}}(U)^k$ для некоторого $t \in \mathbb{R}$. Если $Lu \in H_{s,\mathrm{loc}}(U)^l$, то $u \in H_{s+d,\mathrm{loc}}(U)^l$.*

Мы докажем это предложение при том упрощающем предположении, что в операторе L коэффициенты при D^α, для которых $|\alpha| = d$, являются константами (это равносильно тому, что элементв матрицы $\mathrm{Symb}(L)$ лежат не в $\mathcal{O}[\xi_1, \dots, \xi_d]$, а в $\mathbb{C}[\xi_1, \dots, \xi_d]$).

Доказательство предложения. Сначала сведем все к случаю квадратных матриц, то есть к случаю $k = l$. Для этого покажем, что если L — эллиптический оператор, то эллиптическим будет и оператор $L^*L\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^k$. Именно, будем обозначить через $\mathrm{Symb}_{x,\xi}$ матрицу, получающуюся подстановкой в символ пары $(x,\xi) \in U \times \mathbb{R}^n$. Если $A = \mathrm{Symb}_{x,\xi}(L)$, то из предложения 39.11 вытекает, что $\mathrm{Symb}_{x,\xi}(L^*) = (-1)^d \cdot {}^t\bar{A} =: A^*$. По условию, умножение на матрицу A является инъективным отображением; из этого вытекает, что квадратная матрица $(-1)^d A^*A$ невырождена. В самом деле,

$$A^*Av = 0 \Rightarrow (A^*Av, v) = 0 \Rightarrow (Av, Av) = 0 \Rightarrow Av = 0 \Rightarrow v = 0.$$

Теперь из предложения 39.9 немедленно следует, что порядок оператора L^*L равен $2d$, а из невырожденности матрицы A^*A вытекает, что этот оператор эллиптичен. Поэтому если $Lu \in H_{s,\mathrm{loc}}$, то $L^*Lu \in H_{s-d,\mathrm{loc}}$ по предложению 39.10. Если предложение доказано для эллиптических операторов из $\mathcal{O}^k$ в $\mathcal{O}^k$, то из него следует, что u лежит в пространстве Соболева с индексом $s - d + 2d = s + d$, что и требовалось.

Ввиду сказанного будем далее предполагать, что $L\colon \mathcal{O}^k \to \mathcal{O}^k$. Пусть $u \in H_{t,\mathrm{loc}}(U)^k$ и $Lu \in H_{s,\mathrm{loc}}(U)^k$ (далее будем просто писать $H_{s,\mathrm{loc}}$, $H_{t,\mathrm{loc}}$ и т. п.). Ясно, что достаточно для всякой точки $x \in U$ найти такую окрестность V, что $u|_V \in H_{s+d,\mathrm{loc}}$.

Для $x \in U$ зафиксируем какую-нибудь функцию $\varphi \in D(U)$, равную единице в некоторой окрестности $V \ni x$. Имеем $L(\psi u) - \psi Lu = [L, \psi]u$, где в правой части стоит коммутатор оператора L с оператором умножения на функцию ψ; из формулы Лейбница ясно (ср. предложение 39.4в), что этот оператор имеет порядок $\leqslant d-1$. Более того, $[L,\psi]$ — дифференциальный оператор с коэффициентами в $\mathcal{D}(U)$; их можно рассматривать как функции с компактными носителями на $\mathbb{R}^n$, так что и $[L,\psi]$ также можно рассматривать как дифференциальный оператор на $\mathbb{R}^n$. Наконец, распределения ψu и ψv также будем рассматривать как распределения на $\mathbb{R}^n$ (см. предыдущую лекцию).

Имея все это в виду, заметим, что выполнено равенство

$$L(\psi u) = \psi L(u) + [L,\psi]u = \psi v + [L,\psi]u,$$

причем в правой части первое слагаемое ледит в H_s, а второе — в H_{t-d+1}. Следовательно, $L(\psi u) \in H_{\min(t-d+1,s)}$.

Лемма 39.16. $\psi u \in H_{\min(t+1,s+d)}$.

Вывод предложения из леммы. Будем последовательно применять лемму (всякий раз сужая окрестность V и выбирая новую функцию φ), пока $\psi u \in H_t$, где $t < s + d$. $\square$

Осталось доказать лемму 39.16. Для этого представим оператор L в виде $L = L_1 + L_2$, где L_1 — оператор, составленный из членов порядка d (ввиду нашего предположения, это оператор с постоянными коэффициентами), а L_2 — некоторый оператор порядка $\leqslant d-1$.

Из формулы Лейбница следует, что

$$L_2(\psi u) = \sum_{j=0}^{d-1} \psi_j M_j u, \tag{39.2}$$

где $\psi_j \in \mathcal{D}(U)$ и M_j — некоторый (матричный $k \times k$) дифференциальный оператор на U, имеющий порядок j. Следовательно, все слагаемые в правой части (39.2) можно рассматривать как элементы $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)^k$, причем ввиду предложения 39.10 это они лежат в H_{t-d+1}. Следовательно, $L_1(\psi u) \in H_{\min(t-d+1,s)} = H_\sigma$. Обозначим также $\psi u = w$.

Так как L_1 — оператор с постоянными коэффициентами, его символ (являющийся также символом оператора L) представляет собою $k \times k$-матрицу p_{ij} из однородных многочленов степени d от переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, причем если $w = (w_1, \dots, w_k) \in (H_t)^k$, где $w_j = \hat{f}_j$, $f_j \in L^2(\mu_t)$, то $L_1 w = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k)$, где $g_j = \sum p_{jr} f_r$.

Ввиду эллиптичности матрица $\|p_{ij}(\xi)\|$ невырождена при $\xi \neq 0$. Рассмотрим обратную к ней матрицу $\tilde{Q}(\xi) = \|q_{ij}(\xi)\|$; эта матрица состоит из однородных рациональных функций степени $-d$. Поскольку при всех $\xi \neq 0$ знаменатели в этих рациональных функциях отличны от нуля, верхняя грань

$$A = \sup_{\substack{|v|=1,\\ |\xi|=1}} \frac{|\tilde{Q}(\xi)v|}{|v|}$$

конечна; имеем, очевидно,

$$|Q(\xi)v| \leqslant A|\xi|^{-d}|v| \tag{39.3}$$

для всех $v \in \mathbb{R}^k$ и $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Положим теперь

$$Q(\xi) = \begin{cases} \tilde{Q}(\xi), & |\xi| \geqslant 1, \\ 0, & |\xi| < 1, \end{cases}$$

и пусть $r = Qg$, где $L_1 w = (\hat{g}_1, \dots, \hat{g}_k)$. Заметим, что $r_j \in L^2(\mu_{\sigma+d})$ для всех j. В самом деле, $r_j(\xi) = 0$ при $|\xi| < 1$, а при остальных ξ имеем, ввиду (39.3):

$$|r_j(\xi)| \leqslant |r(\xi)| = |Q(\xi)g(\xi)| \leqslant A|\xi|^{-d}|g(\xi)| \leqslant k \cdot A|\xi|^{-d} \sum |g_j(\xi)|;$$

поскольку $\sum |g_j| \in L^2(\mu_\sigma)$, получаем, что $\hat{r} \in H_{\sigma+d}$; с другой стороны, ясно, что

$$f(\xi) - Q(\xi)g(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \geqslant 1, \\ f(\xi), & |\xi| < 1. \end{cases}$$

Если обозначить вектор в правой части через $F = (F_1, \dots, F_k)$, то $F_j \in L^2(\mu_\lambda)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, так что $\hat{F} \in H_\lambda$ для всех λ. Стало быть, вектор w равен сумме вектора $\widehat{(Q(\xi)g)} = \hat{r}$, все компоненты которого лежат в $H_{\sigma+d}$, и вектора $\hat{F}$, все компоненты которого лежат вообще во всех H_λ. Тем самым $\psi u = w \in H_{\sigma+d} = H_{\min(t+1, s+d)}$, и все доказано. □

В заключение скажем, что всю изложенную в этой лекции теорию можно обобщить с областей в $\mathbb{R}^n$ на произвольные многообразия; вы познакомитесь с этим обобщением в других курсах.