Анализ, листок 4 (осень 2007, 3 семестр)

Плотности и дифференциальные формы

1. Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ — график функции $z = (x^2+y^2)^{-a}$, $x^2+y^2 < 1$, где $a > 0$. Выясните, при каких a площадь поверхности X конечна.

2. Убедитесь, что площадь сферы радиуса r действительно равна $4\pi r^2$.

3. Пусть $\gamma\colon (0;1) \to \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение с ненулевой производной. Положим $F(t,u) = \gamma(t) + u\gamma'(t)$, где $t \in (0;a)$ (образ этого отображения называется развертывающейся поверхностью). Предположим, что $F\colon (0;1)\times(0;a) \to \mathbb{R}^n$ — вложение. Покажите, что площадь поверхности $F((0;1)\times(0;a)) \subset \mathbb{R}^n$ пропорциональна числу a^2.

4. Положим $G = GL_n(\mathbb{R})$. Для $g \in G$ обозначим через $T_g\colon G \to G$ левое умножение на g.

а) Приведите пример ненулевой 1-формы на G, инвариантной относительно всех T_g (дифференциальная форма ω на X называется инвариантной относительно отображения $f\colon X \to X$, если $f^*\omega = \omega$).

б) Тот же вопрос для формы старшей степени на G.

5. Рассмотрим на $\mathbb{R}^3$ форму $\omega = x\,dy\wedge dz + y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy$. Обозначим через $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ сферу радиуса 1 с центром в начале координат.

а) В каких точках сферы S^2 форма $\eta = \omega|_{S^2}$ обращается в нуль?

б) Найдите $\int_{S^2} |\eta|$.

6. а) Покажите, что форма $dx\wedge dy$ на $\mathbb{R}^2$ инвариантна относительно всех вращений.

б) Инвариантна ли форма ω из задачи 5 относительно ортогональных преобразований? Если нет, то как она меняется при этих преобразованиях?