Анализ, листок 5 (осень 2007, 3 семестр)

Дифференциальные формы (продолжение)

1. Пусть Y — подмногообразие в многообразии X, и пусть гладкая функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ постоянна на Y. Покажите, что $(df)|_Y = 0$.

2. Пусть X — многообразие. Так как $\mathcal{T}_x X \cong (\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2)^*$, имеем $\mathcal{T}_x^* X \cong \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$. Для гладкой функции $f\colon X \to \mathbb{R}$ опишите $(df)_x$ как элемент в $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2$.

3. Пусть $\omega = dx + x\,dy$ — форма на $\mathbb{R}^2$.

а) Представима ли она (или хотя бы ограничение $\omega|_U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое подмножество) в виде dg, где g — гладкая функция?

б) Представима ли она (или хотя бы ограничение $\omega|_U$, где $U \subset \mathbb{R}^2$ — непустое открытое подмножество) в виде $f\,dg$, где f и g — гладкие функции?

4. Пусть $\omega = dx + y^2 dz$ — форма на $\mathbb{R}^3$. Представима ли она (или хотя бы ограничение $\omega|_U$, где $U \subset \mathbb{R}^3$ — непустое открытое подмножество) в виде $f\,dg$, где f и g — гладкие функции?

5. Если ω — форма степени k и $v_1, \ldots, v_k$ — векторные поля, то $\omega(v_1, \ldots, v_k)$ — функция, значение которой в точке x равно $\omega_x((v_1)_x, \ldots, (v_k)_x)$. Докажите, что если ω — форма степени 1, то

$$(d\omega)(v, w) = v\omega(w) - w\omega(v) - \omega([v, w])$$

(можно ли здесь обойтись без вычислений в координатах?)

6. Положим

$$G = \{x_0 + \mathbf{i}x_1 + \mathbf{j}x_2 + \mathbf{k}x_3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

(группа кватернионов с единичной нормой). Для $g \in G$ обозначим через $L_g\colon G \to G$ левый сдвиг на g ($T_g(s) = gs$). Дифференциальную форму ω на G будем называть инвариантной, если $L_g^* \omega = \omega$ для всех $g \in G$.

Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — инвариантные 1-формы на G, которые на касательном пространстве к единице имеют вид dx_1 (соотв. dx_2, dx_3). (а) Покажите, что существуют такие константы $c_{\alpha,\beta\gamma}$, что $d\omega_\alpha = \sum c_{\alpha,\beta\gamma}\omega_\beta \wedge \omega_\gamma$; (б) Найдите эти константы в явном виде.