Анализ, листок 6 (осень 2007, 3 семестр)

Дифференциальные формы (окончание)

Среди задач этого листка есть непростые.

1. На $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = dx \wedge dy + dy \wedge dz + dz \wedge dx$. Найдите какую-нибудь форму η, для которой $\omega = d\eta$.

2. Пусть $p = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Положим

$$\omega_p = \frac{(x-a)dy - (y-b)dx}{(x-a)^2 + (y-b)^2} \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}).$$

Пусть $\gamma\colon [0;1] \to \mathbb{R}^2$ — гладкое отображение, для которого $\gamma(0) = \gamma(1)$; предположим, что $p \notin \gamma[0;1]$.

а) Покажите, что $\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega_p$ — целое число (оно называется индексом кривой γ относительно p).

б) Пусть $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\gamma([0;1]))$ — связное открытое множество. Покажите, что $\int_\gamma \omega_p$ один и тот же для всех $p \in U$.

3. Найдите непосредственно из определения $H^1_{DR}(S^1)$.

4*. Найдите непосредственно из определения $H^2_{DR}(S^1 \times S^1)$.

5. Покажите, что дифференциальная форма степени k однозначно определяется своими интегралами по всем сингулярным k-симплексам.

6. Пусть B — невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $\mathbb{R}^{2n}$; если $\mathbb{RP}^{2n-1}$ — проективизация нашего $\mathbb{R}^{2n}$, то всякой точке $x \in \mathbb{RP}^{2n-1}$, соответствующей ненулевому вектору $v \in \mathbb{R}^{2n}$, поставим в соответствие гиперплоскость $H_x \ni x$, являющуюся проективизацией пространства $\{y \mid B(x,y) = 0\}$.

Касательные пространства $\mathcal{T}_x H_x \subset \mathcal{T}_x \mathbb{RP}^{2n-1}$ образуют распределение на $\mathbb{RP}^{2n-1}$. Интегрируемо ли оно?

7. а) Покажите, что грассманиан $G(k,n)$ (k-мерных векторных подпространств в $\mathbb{R}^n$) ориентируем при четном n.

б) Что происходит при нечетном n?