Анализ, листок 7 (осень 2007, 3 семестр)

L^1, L^2 и преобразование Фурье

1. а) Покажите, что $L^2(X,\mu) \subset L^1(X,\mu)$, если $\mu(X) < \infty$.

б) Покажите, что, вообще говоря, $L^2(X,\mu) \not\subset L^1(X,\mu)$, если $\mu(X) = \infty$.

2. а) Покажите, что $L^1(\mathbb{R}^n)$ содержит счетное плотное подмножество.

б) Покажите, что $L^2(\mathbb{R}^n)$ содержит счетное плотное подмножество.

3. а) Покажите, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем) содержит подпространство конечной коразмерности, плотное в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

б) Покажите, что $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ содержит подпространство коразмерности 1, не являющееся плотным в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

4. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность функций из $C(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, причем $f_n \to f$ равномерно на $\mathbb{R}$ и $f \in L^1(\mathbb{R})$. Следует ли из этого, что $f_n \to f$ в $L^1(\mathbb{R})$?

Напомним, что в принятых нами обозначениях

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int f(x) e^{-i\langle x,t\rangle} dx_1 \dots dx_n.$$

В частности, преобразование Фурье от $e^{-(x_1^2+\dots+x_n^2)/2}$ равно $e^{-(t_1^2+\dots+t_n^2)/2}$.

5. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-|x|}$ на $\mathbb{R}$.

6. Пусть Q — симметрическая положительно определенная вещественная $n \times n$-матрица. Найдите преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-{}^t x Q x}$ на $\mathbb{R}^n$ (где $x = (x_1, \dots, x_n)$ рассматривается как вектор-столбец).

7. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Лежит ли $\hat{f}$ в $L^1(\mathbb{R})$?

8. а) Пусть f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ с компактным носителем. Покажите, что $\hat{f}$ — вещественно-аналитическая функция.

б) Покажите, что обратное неверно: если $f \in L^1(\mathbb{R})$ непрерывна и $\hat{f}$ вещественно-аналитично, то носитель функции f не обязан быть компактным.

в) Пусть $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\hat{f} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Покажите, что $f = 0$.

9. Докажите, что всякий непрерывный гомоморфизм из $\mathbb{R}^n$ в группу комплексных чисел, равных по модулю единице, имеет вид $x \mapsto e^{i\langle x,a\rangle}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n$.