Анализ, листок 8 (осень 2007, 3 семестр)

Ряды Фурье и прочее

1. Пусть $a, b > 0$. Найдите свертку функций $e^{-a|x|^2}$ и $e^{-b|x|^2}$ на $\mathbb{R}^n$ (не забудьте про нормировку меры Лебега!).

2. Пусть $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с обычной евклидовой метрикой. Зададим на $\mathbb{R}^n$ и S^{n-1} ориентацию стандартным образом, и пусть форма $\sigma \in \Omega^{n-1}(S^{n-1})$ ставит в соответствие всякому положительно ориентированному базису $e_1, \ldots, e_{n-1} \in \mathcal{T}_p S^{n-1}$ объем $(n-1)$-мерного параллелепипеда, натянутого на $e_1, \ldots, e_{n-1}$ (таким образом, σ — это «форма объема»).

а) Покажите, что

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} x_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \ldots \wedge dx_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$.

б) Пусть отображение $\varphi\colon S^{n-1} \times (0; +\infty) \to \mathbb{R}^n$ задано формулой $(u, r) \mapsto ru$ («сферические координаты»). Покажите, что $\varphi^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = r^{n-1} p_1^* \sigma \wedge p_2^* dr$, где p_1 и p_2 — проекции на первый и второй сомножители.

в) Для каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция $(1 + |x|)^\alpha$ суммируема на $\mathbb{R}^n$?

3. Так как преобразование Фурье, рассматриваемое как оператор на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, имеет порядок 4, его собственными значениями могут быть только ± 1 и $\pm i$. Все ли эти значения действительно реализуются?

4. Докажите, что сопоставление функции на $\mathbb{T}$ ее коэффициентов Фурье задает взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечно дифференцируемых функций и множеством последовательностей $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, для которых $|a_n| = O(|n|^{-K})$ при всяком $K > 0$.

5. а) Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(2\pi n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$$

(«формула Пуассона»). (Указание: положите $g(x) = \sum f(x + 2\pi n)$.)

б) Для $t > 0$ положим

$$\theta(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t}.$$

Докажите, что выполнено тождество

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \theta\left(\frac{\pi^2}{t}\right).$$

6. Пусть $f, g \in C^2(\mathbb{T})$, причем $\hat{f}(n) = \hat{g}(n) = 0$ при $n < 0$.

а) Докажите, что для функции $h = fg$ также имеем $\hat{h}(n) = 0$ при $n < 0$.

б) Докажите, что для функции $u = e^f$ также имеем $\hat{u}(n) = 0$ при $n < 0$.

в) Верны ли эти утверждения, если f и g всего лишь непрерывны на $\mathbb{T}$?

7. Пусть ряд Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ абсолютно сходится. Докажите, что он сходится к f в L^1-метрике.