Анализ, листок 9 (осень 2007, 3 семестр)

Распределения и пространства Соболева

1. а) Найдите производную функции $y = |x|$, рассматриваемой как распределение на $\mathbb{R}$. б) Найдите производную функции $y = [x]$, рассматриваемой как распределение на $\mathbb{R}$.

2. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{(-\infty;-\varepsilon)\cup(\varepsilon;+\infty)} \frac{\varphi(x)dx}{x}.$$

Покажите, что $u(\varphi)$ корректно определено и что соответствие $\varphi \mapsto u(\varphi)$ является распределением на $\mathbb{R}$; оно обозначается v.p.$(1/x)$.

3. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ положим

$$u(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)dx}{x + i\varepsilon}.$$

а) Покажите, что $u(\varphi)$ корректно определено и что соответствие $\varphi \mapsto u(\varphi)$ является распределением на $\mathbb{R}$ (оно обозначается $1/(x + i0)$).

б) Найдите формулу, связывающую v.p.$(1/x)$ и $1/(x + i0)$.

4. Найдите произведения (функции на распределение на $\mathbb{R}$) $(x^2) \cdot \delta$ и $(x^2) \cdot$ v.p.$(1/x)$.

5. Покажите, что на аддитивной группе распределений нельзя ввести структуру коммутативного кольца таким образом, чтобы умножение гладкой функции на распределение совпадало с умножением в этом кольце.

6. а) Лежит ли дельта-функция в $\mathbb{R}^n$ в каком-нибудь пространстве Соболева? Если нет — докажите, если да — укажите, для каких именно s она лежит в H_s.

б) Тот же вопрос про функцию Хевисайда на $\mathbb{R}$ (так иногда называют характеристическую функцию луча $(0; +\infty)$). Если сейчас ответить не получится, вернитесь к этой задаче, когда познакомитесь с эллиптическими уравнениями.

в) Тот же вопрос про распределение

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n \delta,$$

где δ — дельта-функция на $\mathbb{R}$ (иными словами, $u(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n)$).

Наконец, невзирая на заглавие, мы включили в этот листок задачу по анализу на многообразиях.

7. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, $V \subset \mathbb{R}^n$ — множество ее нулей, и пусть $f'(x) \neq 0$ для всех $x \in V$ (так что V — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$). Пусть, наконец, $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$.

а) Покажите, что на $\mathbb{R}^n \setminus V$ выполнено равенство $\omega/f = \eta \wedge (df/f)$, где форма $\eta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus V)$ продолжается до гладкой $(n-1)$-формы на $\mathbb{R}^n$ (обозначим ее тоже η).

б) Покажите, что, хотя форма η из предыдущего пункта определена неоднозначно, ограничение $\mu = \eta|_V$ зависит только от ω/f (это ограничение называется вычетом формы ω/f).