Анализ, экзамен (9 декабря 2007, 3 семестр)
Время на работу — 4 часа

1. Пусть $\omega = x^3dy - y^3\,dx$ (дифференциальная форма на $\mathbb{R}^2$), и пусть $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^2$ — гладкая иммерсия. Покажите, что если $\int_{S^1} \gamma^*\omega = 0$, то γ не является вложением.

2. Пусть на $\mathbb{R}^n$ задано стандартное положительно определенное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, и пусть $k \in (0;n)$ — целое число. Положим

$$X = \{(e_1, \dots, e_k) \in (\mathbb{R}^n)^k \mid (e_i, e_j) = \delta_{ij}\}.$$

а) Покажите, что X — связное гладкое многообразие; найдите его размерность.

б) Ориентируемо ли многообразие X?

в) Покажите, что при $k > 1$ на многообразии X есть векторное поле без нулей.

3. Пусть $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^n$ — гладкое вложение, и пусть для всякой точки $p \in \gamma(S^1)$ задан ненулевой вектор $v(p) \in \mathbb{R}^n$, не касающийся кривой γ и гладко зависящий от p. Для данного $\varepsilon > 0$ положим

$$F_\varepsilon = \{p + tv(p) \mid 0 < t < \varepsilon\}.$$

а) Покажите, что существует такое $\tau > 0$, что F_ε является гладким многообразием при всех $\varepsilon < \tau$.

б) Пусть $\tau > 0.03$, а площади поверхностей $F_{0.01}$ и $F_{0.02}$ равны 0.2 и 0.5 соответственно. Найдите площадь поверхности $F_{0.03}$.

4. Пусть f — бесконечно гладкая функция на $\mathbb{R}^3$ с компактным носителем. Докажите, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} f dx_1 dx_2 dx_3 = -\frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial f}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

5. Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ распределение u, действующее по правилу

$$u\colon \varphi \mapsto \iint\limits_{\substack{-1\leqslant x_1\leqslant 1\\ -1\leqslant x_2\leqslant 1}} \varphi(x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. При каких $s \in \mathbb{R}$ распределение u лежит в пространстве Соболева H_s?