ЛЕКЦИЯ 1

Краткое содержание. Выпуклые множества.

Символом $\mathbb{R}^n$ обозначают множество упорядоченных наборов $(x_1, \dots, x_n)$ действительных чисел. Наборы называют *векторами*. Векторы можно складывать друг с другом и умножать на число — почленно: если $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то $x + y \stackrel{\text{def}}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $\lambda x \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$.

Отрезком $[a, b]$ с концами $a, b \in \mathbb{R}^n$ называется подмножество $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех векторов вида $\lambda_1 a + \lambda_2 b$, где $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками $a, b \in X$ оно содержит весь отрезок с концами в этих точках: $[a, b] \subset X$. Примеры выпуклых множеств:

Пример 1. Отрезок $[a, b]$ для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$ (в том числе одноточечное множество $\{a\} = [a, a]$). Действительно, пусть $c = \lambda_1 a + \lambda_2 b$, $d = \mu_1 a + \mu_2 b$, где $\lambda_i, \mu_i \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2 = 1$. Пусть $x \in [c, d]$, то есть $x = \nu_1 c + \nu_2$, $\nu_1, \nu_2 \geq 0$, $\nu_1 + \nu_2 = 1$. Тогда $x = (\nu_1\lambda_1 + \nu_2\mu_1)a + (\nu_1\lambda_2 + \nu_2\mu_2)b$. Очевидно, $\nu_1\lambda_1 + \nu_2\mu_1, \nu_1\lambda_2 + \nu_2\mu_2 \geq 0$, и $\nu_1\lambda_1 + \nu_2\mu_1 + \nu_1\lambda_2 + \nu_2\mu_2 = \nu_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \nu_2(\mu_1 + \mu_2) = \nu_1 + \nu_2 = 1$. Тем самым $x \in [a, b]$, то есть $[c, d] \subset [a, b]$, то есть отрезок $[a, b]$ — выпуклое множество.

Пример 2. Аффинная гиперплоскость $H \subset V$, то есть множество векторов $(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющих линейному неоднородному уравнению $\varphi(x) = q$, где $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$, а $p_1, \dots, p_n, q \in \mathbb{R}$. Действительно, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет равенствам $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. Поэтому если $\varphi(a) = \varphi(b) = q$, то $\varphi(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \lambda_1\varphi(a) + \lambda_2\varphi(b) = q$.

Пример 3. Аффинное полупространство, то есть множество векторов $x \in V$, удовлетворяющих неравенству $\varphi(x) \leq q$, где функция φ — как в примере 2. Доказательство — упражнение. То же самое верно для открытого полупространства $\varphi(x) < q$.

Предложение 1. *Пересечение произвольного набора выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство очевидно.

Следствие 1. *Любое множество, заданное в $\mathbb{R}^n$ произвольной (конечной или бесконечной) системой линейных неоднородных равенств и неравенств, выпукло.*

Если допускать бесконечные системы неравенств, то класс множеств, описываемых следствием 1, максимально широк: можно доказать (мы не будем этого делать), что *всякое* выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ задается системой аффинных неравенств.

Скалярным произведением векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$ называется число $(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Заметим, что произвольная линейная функция φ (ср. пример 2) может быть записана как $\varphi(x) = (p, x)$, где $p \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, \dots, p_n)$.

Нормой вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ назовем число $|x| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. *Расстоянием* между векторами x и y называется величина $d(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y|$. *Шаром* с центром $u \in \mathbb{R}^n$ и радиусом $R \geq 0$ называется множество $\Omega(u; R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, u) \leq R\}$.

Пример 4. Шар Ω — выпуклое множество.

Для доказательства нам потребуются два технических утверждения:

Лемма 1.
1) *Скалярное произведение линейно по каждому аргументу (билинейно): $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{R}^n$, и аналогично для второго аргумента.*
2) *Скалярное произведение симметрично: $(x, y) = (y, x)$.*
3) *Скалярное произведение положительно определено: $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, и $(x, x) = 0$ только при $x = 0$.*

Доказательство очевидно. Из леммы вытекает, в частности, что норма вектора — положительно однородная функция степени 1: $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$, где $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Лемма 2 (Неравенство Коши–Буняковского–Шварца). *$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y) = |x|^2\,|y|^2$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны.*

Доказательство. Если $y = 0$, то утверждение леммы очевидно. Если $y \neq 0$, рассмотрим функцию $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} |x - ty|^2 = (x - ty, x - ty) = (x, x) - 2t(x, y) + t^2(y, y)$. Этот квадратный трехчлен всюду неотрицателен, поэтому его дискриминант $D = (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$. Равенство дискриминанта нулю означает, что многочлен имеет корень, то есть существует $t \in \mathbb{R}$, для которого $|x - ty| = 0$. Это возможно только при $x - ty = 0$, то есть $x = ty$. $\square$

Доказательство выпуклости шара. Без ограничения общности можно считать, что центром шара u является начало координат. Мы докажем, что шар $\Omega(0, R)$ задается системой линейных неравенств: $(a, x) \leq R$ для всякого вектора a такого, что $|a| \leq 1$. Действительно, пусть $x \in \Omega(0, R)$, то есть $|x| \leq R$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского–Шварца $(a, x) \leq |a|\,|x| \leq R$. Обратно, пусть $(a, x) \leq R$ для всякого a такого, что $|a| \leq 1$. Тогда в качестве a можно, в частности, взять вектор $\frac{x}{|x|}$, поскольку его норма равна $\left|\frac{x}{|x|}\right| = \frac{|x|}{|x|} = 1$. Тогда $|x| = (x, x)/|x| = \left(\frac{x}{|x|}, x\right) \leq R$, то есть $x \in \Omega(0, R)$. Таким образом, выпуклость шара вытекает из следствия 1. $\square$

Функция d, введенная выше, обладает обычными свойствами расстояния:

Предложение 2. *1) $d(x, y) \geq 0$, причем $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.*

2) $d(x, y) = d(y, x)$.

3) (неравенство треугольника) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; равенство достигается тогда и только тогда, когда $y \in [x, z]$.

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из утверждения 3 леммы 1. Утверждение 2 — из положительной однородности нормы (см. замечание после леммы 1).

Для доказательства утверждения 3 обозначим $u = x - y$, $v = y - z$, тогда $x - z = u + v$. Из леммы 2 вытекает, что $(u, v) \leq |u|\,|v|$. Согласно утверждению 1 леммы 1, $|u + v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2(u, v)$, откуда $d^2(x, z) = |u + v|^2 \leq (|u| + |v|)^2 = (d(x, y) + d(y, z))^2$. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $(u, v) = |u|\,|v|$; согласно лемме 2 (см. доказательство) это происходит, когда $u = \lambda v$, где $\lambda \geq 0$. Тем самым $x - y = \lambda(y - z)$, то есть $y = \frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}z$, то есть $y \in [x, z]$. $\square$

Выпуклой комбинацией векторов $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^n$ называют любой вектор вида $y = \sum_{k=1}^N \lambda_k y_k$, где все $\lambda_k \geq 0$, и $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$.

Лемма 3. *Пусть a, b — выпуклые комбинации векторов $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^n$. Тогда любая точка отрезка $[a, b]$ также является их выпуклой комбинацией.*

Для $N = 2$ лемма была доказана в примере 1. В общем случае аналогично:

Доказательство. Пусть $a = \sum_k \lambda_k y_k$ и $b = \sum_k \mu_k y_k$. Тогда $\nu_1 a + \nu_2 b = \sum_k (\nu_1 \lambda_k + \nu_2 \mu_k) y_k$. Очевидно, $\nu_1 \lambda_k + \nu_2 \mu_k \geq 0$ для всех k. В то же время $\sum_k \nu_1 \lambda_k + \nu_2 \mu_k = \nu_1 + \nu_2 = 1$. $\square$

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Множество всех выпуклых комбинаций конечных наборов точек $y_1, \dots, y_N \in M$ (для всевозможных N) называется выпуклой оболочкой множества M и обозначается $\operatorname{co} M$. Из леммы 3 вытекает, что множество $\operatorname{co} M$ выпукло. Выпуклая оболочка конечного множества точек называется выпуклым многогранником.

Аффинным подпространством в $\mathbb{R}^n$ называется непустое множество, задаваемое системой неоднородных линейных уравнений: $L \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid (p_1, x) = q_1, \dots, (p_k, x) = q_k\}$. Подмножество $F \subset X$ выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется его гранью, если множество $X \setminus F$ выпукло и $F = X \cap L$ для некоторго аффинного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$. Если грань состоит из одной точки, она называется вершиной; если грань является отрезком, она называется ребром.

Предложение 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, а $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — линейная функция. Допустим, что существует число c такое, что $\varphi(x) \leq c$ для всех $x \in X$. Тогда множество $F \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid f(x) = c\}$, если оно непусто, является гранью X.*

Доказательство. Пусть $a, b \in X \setminus F$, т.е. $f(a), f(b) < c$. Тогда $f(\lambda_1 a + \lambda_2 b) = \lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b) < c$, поскольку $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. То есть множество $X \setminus F$ выпукло. $\square$

Пример 5. У выпуклого многоугольника на плоскости и выпуклого многогранника в трехмерном пространстве понятия вершины, ребра и двумерной грани совпадают с общепринятыми (докажите!) — отсюда и название.

Пример 6. У шара Ω вершиной является любая точка граничной сферы. Действительно, пусть $\Omega = \Omega(0, R)$, и $|y| = R$. Тогда функция $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} (y, x)$ обладает свойством $\varphi(y) = R$. С другой стороны, если $x \in \Omega(0, R)$ и x не пропорционально y, по неравенству Коши–Буняковского–Шварца имеем $|\varphi(x)| < |x|\,|y| \leq R$, откуда

$\varphi(x) < R$. Если $x \in \Omega(0,R)$ и $x = \lambda y$, $x \neq y$, то $-1 \leq \lambda < 1$. Отсюда $\varphi(x) = \lambda\varphi(y) < R$. Тем самым $\{y\} = \{x \in \Omega(0,R) \mid \varphi(x) = R\}$, и из предложения 1 вытекает, что y — вершина.

Сам шар является своей n-мерной гранью, и больше граней у шара нет (докажите!). Кстати, отсюда видно, что вершина не обязательно является концом ребра. У открытого шара $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-u| < R\}$ граней нет вовсе, за исключением тривиальной n-мерной.

Нетрудно видеть, что выпуклый многогранник на плоскости (т.е. выпуклый многоугольник), любые две вершины которого соединены ребром, обязательно является треугольником. В трехмерном пространстве такой многогранник обязательно является тетраэдром. В пространствах большего числа измерений аналогичный факт неверен:

Пример 7. Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ выпуклую оболочку M точек $a_0 = (0,0,0,0), a_1 = (1,1,1,1)$, $a_2 = (2,4,8,16), \ldots, a_N = (N, N^2, N^3, N^4)$. Покажем, что у этого многогранника все точки a_k являются вершинами. Для доказательства того, что a_k — вершина, рассмотрим многочлен $P_k(t) = (t-k)^4 \stackrel{\text{def}}{=} t^4+p_3t^3+p_2t^2+p_1t+p_0$ (на самом деле $p_3 = -4k, p_2 = 6k^2, p_1 = -4k^3, p_0 = k^4$, но нам эти формулы не понадобятся). Сопоставим этому многочлену линейную функцию $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_4+p_3x_3+p_2x_2+p_1x_1$. Тогда, как нетрудно видеть, $f(a_s) = (s-k)^4-p_0$, т.е. $f(a_k) = -p_0$ и $f(a_s) > -p_0$ при $s \neq k$. Если $x \in M \setminus \{a_k\}$, то $x = \sum \lambda_s a_s$, где $\lambda_i > 0$ хотя бы для одного $i \neq k$. Тогда $f(x) = \sum_s \lambda_s f(a_s) > -p_0$. Из предложения 1 вытекает, что a_k — вершина.

Докажем теперь, что вершины a_k и a_l соединены ребром. Для этого рассмотрим многочлен $P_{kl}(t) = (t-k)^2(t-l)^2 \stackrel{\text{def}}{=} t^4+q_3t^3+q_2t^2+q_1t+q_0$ (на самом деле $q_3 = -2(k+l)$, и т.д.) и сопоставим ему линейную функцию $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_4+q_3x_3+q_2x_2+q_1x_1$. Нетрудно видеть, что $g(a_s) = (s-k)^2(s-l)^2-q_0$, откуда следует, что $g(a_k) = g(a_l) = -q_0$, и $g(a_s) > -q_0$ при $s \neq k,l$. Отсюда очевидно выводится, что $g(x) = -q_0$ во всех точках $x \in [a_k, a_l]$. Далее аналогично: если $x \in M \setminus [a_k, a_l]$, это означает, что $x = \sum \lambda_s a_s$, где $\lambda_i > 0$ хотя бы для одного $i \neq k,l$. Отсюда $g(x) = \sum_s \lambda_s g(a_s) > -q_0$. Из предложения 1 вытекает, что $[a_k, a_l]$ является ребром M.