ЛЕКЦИЯ 10

Краткое содержание. Определение фундаментальной группы топологического пространства. Фундаментальная группа окружности.

Пусть X — топологическое пространство, $b \in X$ — отмеченная точка. *Петлей* в пространстве X называется произвольное непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to X$ такое, что $\gamma(0) = \gamma(1) = b$. *Гомотопией петель* называется непрерывное отображение $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to X$ такое, что для каждого $\tau \in [0,1]$ отображение $\Gamma|_{[0,1]\times\{\tau\}} = \Gamma(\cdot, \tau) : [0,1] \to X$ — петля. Последнее определение, в частности, предполагает, что $\Gamma(0,\tau) = \Gamma(1,\tau) \equiv b$ — начальная точка остается при гомотопии неподвижной. Петли γ_0 и γ_1 называются гомотопными (обозначение $\gamma_0 \sim \gamma_1$), если существует гомотопия Γ, соединяющая эти петли, т.е. такая, что $\gamma_i(t) = \Gamma(t,i)$, $i = 0,1$.

Предложение 1. *Отношение гомотопности петель является отношением эквивалентности: $a \sim a$ (рефлексивность), $a \sim b \Longleftrightarrow b \sim a$ (симметричность), $a \sim b$ &$b \sim c \Longrightarrow a \sim c$ (транзитивность).*

Доказательство. Рефлексивность: гомотопия $\Gamma(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} a(t)$, $\forall t \in [0,1]$, соединяет петлю a с собой. Симметричность: если гомотопия Γ соединяет петли a и b, то гомотопия $\widetilde{\Gamma}(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(t, 1-\tau)$ соединяет петли b и a. Транзитивность: если Γ_1 соединяет a и b, а Γ_2 — b и c, то гомотопия $\Gamma(t,\tau) = \begin{cases} \Gamma_1(t, 2\tau), & 0 \le \tau \le 1/2, \\ \Gamma_2(t, 2\tau - 1), & 1/2 \le \tau \le 1 \end{cases}$ соединяет a и c. Гомотопия Γ непрерывна: при $\tau \ne 1/2$ это следует из непрерывности Γ_1 и Γ_2, а при $\tau = 1/2$ — из равенства $\Gamma_1(1) = b = \Gamma_2(0)$. □

Множество классов эквивалентности обозначается $\pi_1(X,b)$.

Пример 1. Пусть $X = \mathbb{R}^n$. Для произвольной петли γ можно рассмотреть гомотопию $\Gamma(t,\tau) = (1-\tau)\gamma(t)$, соединяющую γ с петлей $n(t) \equiv 0$. Тем самым множество $\pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$ состоит из одного элемента.

Пример 2. Пусть $X = S^1$ (окружность). Реализуем X как множество $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ и выберем в качестве отмеченной точки $b = 1$. Отображение $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ называется разверткой петли $\gamma : [0,1] \to S^1$, если $f(0) = 0$ и $f(t) \in \operatorname{Arg}\gamma(t)$ для всякого $t \in [0,1]$; здесь $\operatorname{Arg} z$ это набор всевозможных значений аргумента числа $z \in S^1$ (арифметическая прогрессия с шагом 2π).

Лемма 1 (про окружность). *Для каждой петли на окружности развертка существует и единственна.*

Доказательство. Обозначим $T = \{t \in [0,1] \mid f(s)$ существует и единственна при $s \in [0,t]\}$. Множество T непусто, поскольку $0 \in T$. Кроме того, если $t \in T$ и $t' < t$, то, очевидно, $t' \in T$. Утверждение леммы эквивалентно тому, что $T = [0,1]$.

Отображение γ непрерывно, отрезок $[0,1]$ — компакт, следовательно, γ равномерно непрерывно, и существует $\varepsilon > 0$ такое, что если $|t_1 - t_2| < \varepsilon$, то точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ отстоят друг от друга не более чем на $1/4$ часть окружности.

Пусть $t_1 \in T$ и $t_2 < t_1 + \varepsilon$. В множестве $\operatorname{Arg}\gamma(t_2)$ имеется единственный элемент, отстоящий от $f(t_1)$ менее, чем на $\pi/2$ (в положительную или отрицательную сторону). Возьмем этот элемент в качестве $f(t_2)$.

Очевидно, величина $|f(t_1) - f(t_2)|$ равна наименьшему (по модулю) углу между с вершиной в начале координат и лучами через точки $\gamma(t_1), \gamma(t_2) \in S^1$. Поскольку отображение γ непрерывно, этот угол стремится к нулю при $t_2 \to t_1$, откуда следует, что $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то есть является разверткой петли γ.

Пусть $g : [0,t_2] \to \mathbb{R}$ — другая развертка. Пусть $t_* = \inf\{s \in [0,1] \mid g(s) \ne f(s)\}$. На отрезке $[0,t_1]$ развертка единственна по определению множества T, так что $t_* \ge t_1$. Тогда $\lim_{s\to t_*-0} g(s) = f(t_*)$, но для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка t, $t_* < t < t_* + \varepsilon$ такая, что $|g(t) - f(t_*)| > 2\pi - \pi = \pi$. Тем самым равенство $\lim_{s\to t_*+0} g(s) = f(t_*)$ невозможно, и функция g разрывна, то есть разверткой не является.

Тем самым $t_2 \in T$, откуда вытекает (напомним, что t_2 — произвольный элемент интервала $(t_1, t_1 + \varepsilon)$), что $T = [0,1]$. □

Пусть f — развертка петли γ. Поскольку $\gamma(1) = 1$, имеет $f(1) \in \{2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Число $\operatorname{ind}\gamma \stackrel{\text{def}}{=} f(1)/(2\pi) \in \mathbb{Z}$ называется индексом петли γ.

Пусть теперь $\Gamma(t,\tau)$ — гомотопия, соединяющая кривые γ_0 и γ_1, а $f(t,\tau)$ — соответствующие развертки. Из равномерной непрерывности вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что коль скоро $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$, разница аргументов точек $\Gamma(t,\tau_1)$ и $\Gamma(t,\tau_2)$ менее ε. Следовательно, $|f(t,\tau_1) - f(t,\tau_2)| < \varepsilon$, откуда вытекает, что $f(t,\tau)$ зависит от τ непрерывно. В частности, $\operatorname{ind}\Gamma(\cdot,\tau)\in\mathbb{Z}$ непрерывно зависит от τ, откуда вытекает, что он остается при гомотопии петель постоянным.

Лемма 2 (про окружность). *Петли γ_0 и γ_1 гомотопны тогда и только тогда, когда.* $\operatorname{ind}\gamma_0=\operatorname{ind}\gamma_1$.

Доказательство. Пусть $\Gamma(t,\tau)$ — гомотопия, соединяющая петли γ_0 и γ_1, а $f(t,\tau)$ — соответствующие развертки. Из равномерной непрерывности вытекает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что коль скоро $|\tau_1-\tau_2|<\delta$, разница аргументов точек $\Gamma(t,\tau_1)$ и $\Gamma(t,\tau_2)$ менее ε. Следовательно, $|f(t,\tau_1)-f(t,\tau_2)|<\varepsilon$, откуда вытекает, что $f(t,\tau)$ зависит от τ непрерывно при всяком t. В частности, $\operatorname{ind}\Gamma(\cdot,\tau)\in\mathbb{Z}$ непрерывно зависит от τ, откуда вытекает, что индексы гомотопных петель одинаковы.

Пусть, напротив, $f_0,f_1:[0,1]\to\mathbb{R}$ — развертки петель γ_0, γ_1, и $\operatorname{ind}\gamma_0=f_0(1)=f_1(1)=\operatorname{ind}\gamma_1$. Положим $f(t,\tau)\stackrel{\text{def}}{=}(1-\tau)f_0(t)+\tau f_1(t)$. Тогда $f(1,\tau)=const.$, и отображение $\Gamma(t,\tau)=e^{if(t,\tau)}$ является гомотопией петель, соединяющей γ_0 и γ_1. □

Петля $\gamma_k(t)=e^{kit}=\cos(kit)+i\sin(kit)$ имеет индекс k (убедитесь!). Следовательно, эти петли попарно негомотопны, и множество $\pi_1(S^1)$ бесконечно.

Произведением петель γ_1 и γ_2 называется петля $\gamma(t)=\begin{cases}\gamma_1(2t), & 0\le t\le 1/2\\ \gamma_2(2t-1), & 1/2\le t\le 1\end{cases}$.

Теорема 1. *Операция умножения петель порождает корректно определенное умножение на множестве $\pi_1(X,b)$. Относительно этого умножения $\pi_1(X,b)$ является группой. Если пространство X линейно связно, то группы $\pi_1(X,b)$ при различных b изоморфны.*

Построенная группа называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой b.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нужно показать, что если $\gamma_1\sim\gamma_1'$, $\gamma_2\sim\gamma_2'$, то $\gamma_1\cdot\gamma_2\sim\gamma_1'\cdot\gamma_2'$. Пусть Γ_1 — гомотопия, соединяющая γ_1 и γ_1', а Γ_2 — гомотопия, соединяющая γ_2 и γ_2'. Тогда нетрудно проверить, что гомотопия, заданная формулой $\Gamma(t,\tau)=\begin{cases}\Gamma_1(2t,\tau), & 0\le t\le 1/2\\ \Gamma_2(2t-1,\tau), & 1/2\le t\le 1\end{cases}$, соединяет $\gamma_1\cdot\gamma_2$ и $\gamma_1'\cdot\gamma_2'$,

Умножение в $\pi_1(X,b)$ имеет единицу — ею служит класс "тождественной" петли $e(t)\equiv b$. Действительно, $\Gamma(t,\tau)=\begin{cases}\gamma((2-\tau)t), & 0\le t\le 1/(2-\tau)\\ b, & 1/(2-\tau)\le t\le 1\end{cases}$ — гомотопия (фактически "замена параметра"), соединяющая петли $\gamma\cdot e$ и γ; гомотопность $e\cdot\gamma$ и γ доказывается аналогично.

Построение гомотопии, соединяющей петли $(\gamma_1\cdot\gamma_2)\cdot\gamma_3$ и $\gamma_1\cdot(\gamma_2\cdot\gamma_3)$ — упражнение (это тоже "замена параметра"). Из существования такой гомотопии следует ассоциативность умножения.

Для всякой петли γ можно рассмотреть петлю $\widetilde{\gamma}$, заданную равенством $\widetilde{\gamma}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\gamma(1-t)$. Гомотопия $\Gamma(t,\tau)=\begin{cases}\gamma(2t), & 0\le t\le\tau/2,\\ \gamma(\tau), & \tau/2\le t\le 1-\tau/2,\\ \gamma(2-2t), & 1-\tau/2\le t\le 1\end{cases}$ соединяет $\gamma\cdot\widetilde{\gamma}$ и e и доказывает, что для каждого класса эквивалентности в $\pi_1(X,b)$ существует обратный.

Таким образом, $\pi_1(X,b)$ — группа.

Пусть $b_1,b_2\in X$, и X линейно связно. Тогда существует непрерывная кривая $\varphi:[0,1]\to X$ такая, что $\varphi(0)=b_1$, $\varphi(1)=b_2$. Пусть γ — петля в X с началом в b_2. Тогда $A_\varphi(\gamma)(t)=\begin{cases}\varphi(3t), & 0\le t\le 1/3,\\ \gamma(3t-1), & 1/3\le t\le 2/3,\\ \varphi(3-3t), & 2/3\le t\le 1\end{cases}$ является петлей с началом в b_1. Нетрудно проверить (проделайте!), что если $\gamma_1\sim\gamma_2$, то $A_\varphi(\gamma_1)\sim A_\varphi(\gamma_2)$. Поэтому A_φ является отображением $\pi_1(X,b_2)$ в $\pi_1(X,b_1)$. Также легко проверяется, что это гомоморфизм групп: $A_\varphi(\gamma_1\cdot\gamma_2)\sim A_\varphi(\gamma_1)\cdot A_\varphi(\gamma_2)$. Если $\widetilde{\varphi}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\varphi(1-t)$ — кривая, соединяющая b_2 с b_1, то $A_{\widetilde{\varphi}}(A_\varphi(\gamma))\sim\gamma$. Отсюда следует, что гомоморфизм $A_{\widetilde{\varphi}}$ — обратный к гомоморфизму A_φ, то есть A_φ — изоморфизм. □

Лемма 3 (про окружность). $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$.

Доказательство. Согласно лемме 2, всякая петля $\gamma:[0,1]\to S^1$ гомотопна одной из петель γ_k (для этого нужно взять $k=\operatorname{ind}\gamma$). С другой стороны, петля $\gamma_{k_1}\cdot\gamma_{k_2}$ имеет, как нетрудно убедиться, индекс k_1+k_2, то есть гомотопна, согласно лемме 2, петле $\gamma_{k_1+k_2}$. □