ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Свойства фундаментальной группы. Фундаментальная группа пространства орбит.

Пусть X_1, X_2 — топологические пространства с отмеченными точками b_1, b_2, а $p : X_1 \to X_2$ — непрерывное отображение такое, что $p(b_1) = b_2$. Тогда для произвольной петли $\gamma : [0,1] \to X_1$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b_1$, отображение $p \circ \gamma : [0,1] \to X_2$ определяет петлю в X_2 с началом b_2.

Лемма 1. *Если петли γ_0 и γ_1 гомотопны, то петли $p \circ \gamma_0$ и $p \circ \gamma_1$ также гомотопны.*

Доказательство. Если гомотопия γ_τ соединяет γ_0 и γ_1, то гомотопия $p \circ \gamma_\tau$ соединяет $p \circ \gamma_0$ и $p \circ \gamma_1$. □

Таким образом, корректно определено отображение $p_* : \pi_1(X_1, b_1) \to \pi_1(X_2, b_2)$.

Предложение 1. *Отображение p_* является гомеоморфизмом групп. Если отображения p_0 и p_1 гомотопны (в классе отображений $X_1 \to X_2$, переводящих b_1 в b_2), то гомоморфизмы $(p_0)_*$ и $(p_1)_*$ совпадают. Для любых двух отобрежений $q : X_1 \to X_2$, $p : X_2 \to X_3$ имеет место равенство $(p \circ q)_* = p_* \circ q_*$.*

Доказательство. Гомоморфность p_* следует из очевидного равенства $p \circ (\gamma_1 \cdot \gamma_2) = (p \circ \gamma_1) \cdot (p \circ \gamma_2)$ (т.е. гомоморфность имеет место еще до факторизации по гомотопиям). Если p_0 и p_1 соединяются гомотопией $P(x, \tau)$ ($x \in X_1$, $\tau \in [0,1]$), то петли $(p_0)_*(\gamma)$ и $(p_1)_*(\gamma)$ для произвольного γ соединяются гомотопией $\Gamma(t, \tau) = P(\gamma(t), \tau)$, поэтому $(p_0)_* = (p_1)_*$.

Последнее утверждение следует непосредственно из определения. □

Топологические пространства X_1, X_2 называются гомотопически эквивалентными, если существуют такие непрерывные отображения $f : X_1 \to X_2$ и $g : X_2 \to X_1$, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ гомотопны тождественным отображениям пространств X_1 и X_2 соответственно. Если X_1, X_2 — пространства с отмеченными точками b_1, b_2, то требуется, чтобы $f(b_1) = b_2$, $g(b_2) = b_1$, и гомотопия должна сохранять отмеченные точки на месте.

Пример 1. Если пространства X_1 и X_2 гомеоморфны, то они гомотопически эквивалентны.

Пример 2. Пространство $\mathbb{R}^n$ гомотопически эквивалентно одноточечному пространству $\{p\}$ (как говорят, стягиваемо). Возьмем $f(x) = p$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, и $g(p) = 0$. Тогда $g \circ f$ — тождественное отображение $\{p\}$ в себя, а $f \circ g(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Гомотопия $\Gamma(x, \tau) = (1 - \tau)x$ соединяет $f \circ g$ с тождественным отображением.

Пример 3. Пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ гомотопически эквивалентно сфере S^{n-1}. Пусть $g : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — вложение S^{n-1} в качестве единичной сферы с центром в начале координат, а $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ — проекция: $f(x) = x/|x|$. Тогда $f \circ g$ — тождественное отображение сферы в себя, а $g \circ f$ соединяется с тождественным отображением $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ гомотопией $\Gamma(x, \tau) = x(\tau + (1 - \tau)/|x|)$.

Следствие 1. *Если пространства X_1 и X_2 гомотопически эквивалентны (как пространства с отмеченными точками b_1 и b_2), то их фундаментальные группы изоморфны.*

Доказательство. Пусть f, g — отображения из определения гомотопической эквивалентности. Из предложения 1 следует, что f_* и g_* — два взаимно обратных гомоморфизма $\pi_1(X_1, b_1) \longleftrightarrow \pi_1(X_2, b_2)$. □

В частности, из примера 2 еще раз вытекает утверждение примера 1 лекции 10: группа $\pi_1(\mathbb{R}^n)$ тривиальна.

Линейно связное пространство с тривиальной фундаментальной группой называется *односвязным*.

Пусть G — группа преобразований топологического пространства X. Она называется точно дискретной, если все преобразования $g : X \to X$, $g \in G$, непрерывны и для каждой точки $x \in X$ существует такая ее окрестность U, что множества $g(U) \stackrel{\text{def}}{=} \{g(x) \mid x \in U\}$ при различных $g \in G$ не пересекаются. Напомним, что орбитой точки $x \in X$ называется множество $B_x \stackrel{\text{def}}{=} \{g(x) \mid g \in G\} \subset X$. Нетрудно доказать, что при $x, y \in X$ имеем либо $B_x = B_y$, либо $B_x \cap B_y = \varnothing$. Множество орбит группы G обозначается X/G. Существует естественная проекция $p : X \to X/G$, сопоставляющая каждому элементу его орбиту: $p(x) \stackrel{\text{def}}{=} B_x$. Топология на X/G определяется так: открытыми множествами считаются образы открытых множеств пространства X при отображении p, то есть множества вида $A_U = \{B_x \mid x \in U\}$, где U — произвольное открытое подмножество X.

Теорема 1. *Пусть топологическое пространство X односвязно и группа G действует на нем точно дискретно. Тогда $\pi_1(X/G) = G$.*

Пример 4. Пусть $X = \mathbb{R}$, G — группа параллельных переносов вида $g_k(x) = x + k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Как нетрудно убедиться, пространство орбит X/G гомеоморфно окружности S^1. Группа G точно дискретна (проверьте!), откуда $\pi_1(S^1) = G \cong \mathbb{Z}$.

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем базисную точку $b \in X$; базисной точкой в X/G будем считать $p(b)$. Пусть $\gamma : [0,1] \to X/G$ — петля с началом $p(b)$. Кривая (не обязательно замкнутая) $f : [0,1] \to X$ называется разверткой (или поднятием) петли γ, если $f(0) = b$ и $\gamma(t) = p(f(t))$ для всех $t \in [0,1]$.

Лемма 2. *Для любой петли γ в X/G с началом $p(b)$ развертка существует и единственна. Развертка непрерывно зависит от кривой: если γ_τ, $\tau \in [0,1]$ — гомотопия, и f_τ — развертка γ_τ, то f_τ — также гомотопия.*

Доказательство. Доказательство, по сути, копирует частный случай, разобранный в примере 2 лекции 10. Рассмотрим множество T всех $t \in [0,1]$ таких, что развертка существует и единственна при $s \in [0,t]$. Очевидно, $0 \in T$. Покажем, что T открыто. Пусть $t \in T$; тогда по условию теоремы существует окрестность $U \subset X$ точки $f(t)$ такая, что любая орбита группы G пересекается с U не более чем в одной точке. Образ $p(U) \subset X/G$ открыт по определению топологии в X/G. Петля $\gamma : [0,1] \to X/G$ — непрерывное отображение, поэтому множество $V = \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in p(U)\}$ открыто. Для каждого $t \in V$ орбита $\gamma(t)$ пересекается с U по одному элементу; этот элемент и возьмем в качестве $f(t)$. По условию, $t \in V$; значит, некоторая окрестность t тоже принадлежит V и, следовательно, принадлежит T. Открытость T доказана.

Докажем теперь, что T замкнуто. Пусть t — предельная точка T, то есть для всякого $\varepsilon > 0$ существует точка $s > t - \varepsilon$ такая, что $s \in T$. Очевидно, если f — развертка кривой γ на отрезке $[0, t_0]$, то для всякого $t_1 < t_0$ та же кривая — развертка и на отрезке $[0, t_1]$. Поскольку при $s \in T$ развертка на $[0, s]$ единственна, развертки на всех отрезках вида $[0, s]$ согласованы, то есть существует (и единственна) развертка на всем интервале $[0, t)$. Из дискретности вытекает, что существует такая окрестность U точки $\gamma(t) \in X/G$, что $p^{-1}(U) \subset X$ является объединением непересекающихся открытых множеств U_i, переводимых друг в друга элементами группы G. Из непрерывности вытекает, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\gamma(s) \in U$ при всяком $s > t - \varepsilon$. Поскольку развертка f также непрерывна, все точки $f(s)$ при $s > t - \varepsilon$ принадлежат ровно одному из множеств U_i. Это множество пересекается с орбитой $\gamma(t)$ по одному элементу, который и следует взять в качестве $f(t)$. Значит, $t \in T$, то есть T замкнуто.

Таким образом, множество $T \subset [0,1]$ открыто, замкнуто и непусто — из этого вытекает, что $T = [0,1]$, то есть развертка существует и единственна.

Доказательство того, что развертка непрерывно зависит от петли, такое же, как в примере 2 лекции 10 (проделайте!). □

Кривая $f(t)$ не является, вообще говоря, петлей: $p(f(1)) = p(b)$, из чего следует только, что $\exists! g \in G : f(1) = g(b)$. Тем самым каждой петле γ сопоставлен однозначно определенный элемент $g \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind}(\gamma) \in G$ — индекс петли. Согласно лемме 2, $f(1)$ непрерывно зависит от петли γ. Поскольку $f(1) \in p^{-1}(b)$, а это множество дискретно, отсюда вытекает, что если γ_τ — гомотопия петель, то $f_\tau(1) = const$. Отсюда вытекает, что индексы гомотопных петель одинаковы. Тем самым построено отображение $\operatorname{ind} : \pi_1(X/G, p(b)) \to G$.

Это отображение — гомоморфизм. Действительно, пусть γ_1, γ_2 — петли, а f_1, f_2 — их развертки. Тогда развертка петли $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ есть $f_1 \cdot \varphi$, где $p \circ \varphi = \gamma_2$, но, в отличие от развертки f_2, имеем $\varphi(0) = b_1 \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{ind}(\gamma_1)(b)$. Если в качестве отмеченной точки в пространстве X выбрать b_1, то лемма 2 останется верной. Отображение $\tilde{\varphi} = \operatorname{ind}(\gamma_1) \circ f_2$ удовлетворяет условиям $p \circ \tilde{\varphi} = \gamma_2$ и $\tilde{\varphi}(0) = b_1$, откуда в силу единственности $\tilde{\varphi} = \varphi$. Отсюда вытекает, что $\operatorname{ind}(\gamma_1 \cdot \gamma_2) = \operatorname{ind}(\gamma_1) \cdot \operatorname{ind}(\gamma_2)$.

Это отображение — эпиморфизм: в силу линейной связности X точки b и $g(b)$ (для произвольного $g \in G$) можно соединить кривой $f : [0,1] \to X$. Проекция $p \circ f$ этой кривой есть петля, для которой $\operatorname{ind}(p \circ f) = g$.

Это отображение — мономорфизм. Действительно, пусть $\operatorname{ind}(\gamma) = e$ (единичный элемент группы G). Иными словами, развертка f есть петля в X. В силу односвязности X существует гомотопия Γ, соединяющая петлю f с тождественной. Тогда $p \circ \Gamma$ — гомотопия, соединяющая γ с тождественной петлей в X/G. □