ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Аффинные пространства.

n-мерным аффинным пространством называется множество L, для которого определено отображение $L \times L \to \mathbb{R}^n$, сопоставляющее каждой паре точек $a, b \in L$ вектор $\overrightarrow{ab} \in \mathbb{R}^n$ так, чтобы выполнялись такие требования:

1) (правило треугольника) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$;
2) (аксиома откладывания) Для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ и для каждой точки $a \in L$ существует ровно одна точка $b \in L$ такая, что $\overrightarrow{ab} = v$.

Из свойств 1–2 вытекает немедленно, что $\overrightarrow{ab} = 0 \Leftrightarrow a = b$, а также $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$. Более того, свойство 2 позволяет отождествить L с $\mathbb{R}^n$, а именно: зафиксируем какую-нибудь точку $a \in L$ и сопоставим каждому вектору $v \in V$ точку $b \in L$ такую, что $\overrightarrow{ab} = v$. Согласно свойству 2 это соответствие будет взаимно однозначным; обозначим его S_a. При разном выборе $a \in L$ соответствия $S_a : \mathbb{R}^n \to L$ будут различны: $\overrightarrow{S_a(v)S_b(v)} = \overrightarrow{ab}$ для любого $v \in \mathbb{R}^n$ (докажите!).

Отображение $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется *линейным оператором*, если $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ (аддитивность) и $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ (однородность); здесь $v, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ — произвольные векторы, а $\lambda \in \mathbb{R}$ — произвольное число.

Пределом последовательности векторов $v_k = (v_{1k}, \dots, v_{nk}) \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots$, называется вектор $v = (\lim_{k\to\infty} v_{1k}, \dots, \lim_{k\to\infty} v_{nk}) \in \mathbb{R}^n$. Отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем непрерывным, если $\lim_{k\to\infty} f(v_k) = f(\lim_{k\to\infty} v_k)$ для любой последовательности векторов v_k, имеющей предел. Отображение $\varphi : L \to L$ аффинного пространства в себя назовем непрерывным, если непрерывно отображение $S_a^{-1} \circ \varphi \circ S_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ для какой-либо точки $a \in L$. Нетрудно видеть, что от выбора точки a непрерывность не зависит.

Преобразование $B : L \to L$ называется *аффинным*, если оно непрерывно и переводит равные векторы в равные векторы: $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt} \Rightarrow \overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{B(z)B(t)}$.

Пример 1. *Параллельный перенос* $T_v : L \to L$ на вектор $v \in \mathbb{R}^n$ сопоставляет каждой точке x такую точку y, что $\overrightarrow{xy} = v$. По правилу треугольника имеем $\overrightarrow{T_v(a)T_v(b)} = -\overrightarrow{aT_v(a)} + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bT_v(b)} = -v + \overrightarrow{ab} + v = \overrightarrow{ab}$. Точка $b \stackrel{\text{def}}{=} T_v(S_a(u))$ обладает свойством $\overrightarrow{S_a(u)b} = v$, откуда $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{aS_a(u)} + v = u + v$, и $(S_a^{-1} \circ T_v \circ S_a)(u) = S_a^{-1}(b) = u + v$. Очевидно, это отображение непрерывно — следовательно, параллельный перенос является аффинным преобразованием.

Пусть B — аффинное преобразование. Для каждого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ вектор $\widetilde{B}(v) \in \mathbb{R}^n$ однозначно определен равенством $\widetilde{B}(v) = \overrightarrow{B(x)B(y)}$, где x, y — произвольная пара точек такая, что $\overrightarrow{xy} = v$. Таким образом, для каждого аффинного преобразования B определен оператор $\widetilde{B} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Оператор $\widetilde{B}$ линеен.*

Доказательство. Рассмотрим три точки $x, y, z \in L$ такие, что $\overrightarrow{xy} = v_1$, $\overrightarrow{yz} = v_2$. Тогда $\overrightarrow{xz} = v_1 + v_2$, и $\widetilde{B}(v_1 + v_2) = \overrightarrow{B(x)B(z)} = \overrightarrow{B(x)B(y)} + \overrightarrow{B(y)B(z)} = \widetilde{B}(v_1) + \widetilde{B}(v_2)$, т.е. оператор $\widetilde{B}$ аддитивен.

Докажем теперь, что всякий непрерывный аддитивный оператор также и однороден, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и произвольного $v \in \mathbb{R}^n$.

Пусть сначала $\lambda \in \mathbb{N}$ — целое положительное число. Тогда $\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(v) + \dots + \widetilde{B}(v)$ (λ раз) $= \lambda \widetilde{B}(v)$. Заметим, что $\widetilde{B}(0) = \widetilde{B}(0 + 0) = \widetilde{B}(0) + \widetilde{B}(0)$, откуда следует, что $\widetilde{B}(0) = 0$. Если теперь $\lambda \in \mathbb{Z}$ отрицательно, то $-\lambda \in \mathbb{N}$, откуда $\widetilde{B}(\lambda v + (-\lambda)v) = \widetilde{B}(\lambda v) - \lambda \widetilde{B}(v) = \widetilde{B}(0) = 0$, т.е. $\widetilde{B}(\lambda v) = \lambda \widetilde{B}(v)$. Тем самым однородность доказана для целых λ.

Пусть теперь $\lambda = p/q \in \mathbb{Q}$. Мы знаем, что $q\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(q\lambda v) = \widetilde{B}(pv) = p\widetilde{B}(v)$, откуда вытекает однородность уже для рациональных λ.

Для произвольного $\lambda \in \mathbb{R}$ существует последовательность $x_k \in \mathbb{Q}$ такая, что $\lim_{k\to\infty} x_k = \lambda$ — например, в качестве x_k можно взять последовательные десятичные приближения к λ. Нетрудно видеть, что из непрерывности оператора B вытекает непрерывность $\widetilde{B}$, откуда $\widetilde{B}(\lambda v) = \widetilde{B}(\lim_{k\to\infty} x_k v) = \lim_{k\to\infty} \widetilde{B}(x_k v) = \lim_{k\to\infty} x_k \widetilde{B}(v)$ (поскольку для рационального множителя однородность уже доказана) $= \lambda \widetilde{B}(v)$. $\square$

Замечание. От требования непрерывности преобразования B можно было бы отказаться — результат останется верен — но это сильно усложнит доказательство. См. книгу В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, "Геометрия").

Следующая теорема описывает, во что переходят аффинные преобразования при отождествлении аффинного пространства с линейным.

Теорема 2. *Пусть L — аффинное пространство, $a \in L$ и $B : L \to L$ — аффинное преобразование. Тогда отображение $C \stackrel{def}{=} S_a^{-1} B S_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет вид $C(v) = \widetilde{B}v + u$, где $u = \overrightarrow{aB(a)}$. Для всякого отображения вида $C(v) = Av + u$ существует и единственно аффиное преобразование $B : L \to L$, для которого $C = S_a^{-1} B S_a$.*

Доказательство. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, и точка $p \in L$ такова, что $\overrightarrow{ap} = v$. Тогда имеем: $C(v) = S_a^{-1}(B(S_a(v))) = S_a(B(p)) = \overrightarrow{aB(p)} = \overrightarrow{aB(a)} + \overrightarrow{B(a)B(p)} = u + \widetilde{B}(\overrightarrow{ap}) = u + Av$. Обратно: пусть $C(v) = Av + u$ и $a \in L$. Положим $B = S_a C S_a^{-1}$. Тогда для произвольных точек $x, y \in L$ имеет место равенство $\overrightarrow{B(x)B(y)} = A\overrightarrow{xy}$. Тем самым, равные векторы переходят в равные. Поскольку линейный оператор A непрерывен, преобразование B также непрерывно и, следовательно, аффинно. □

Замечание. Преобразование C зависит от выбора точки a. Точнее, его "линейная часть" $\widetilde{B}v$ при изменении точки a сохраняется (оператор $\widetilde{B}$ определен однозначно и от выбора точки не зависит), а "свободный член" — вектор u — меняется: $u_b = \overrightarrow{bB(b)} = \overrightarrow{aB(a)} + \overrightarrow{B(a)B(b)} - \overrightarrow{ab} = u_a + (\widetilde{B} - I)\overrightarrow{ab}$, где символом I обозначен тождественный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Группа преобразований множества M это множество G обратимых отображений множества M таких, что для любых двух отображений $g, h \in G$ их композиция $gh \in G$, и если $g \in G$, то и обратное отображение $g^{-1} \in G$. В частности, всякая группа преобразований содержит тождественное отображение $\mathrm{id}_M = gg^{-1}$.

Пример 2. Обратимые линейные преобразования $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ образуют группу $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Обратимые аффинные преобразования $B : L \to L$ образуют группу $\mathrm{Aff}(L)$.

Гомоморфизмом групп преобразований G и H называется отображение $f : G \to H$, для которого $f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$ и $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Теорема 3. *Если аффинное преобразование B обратимо, то линейный оператор $\widetilde{B}$ также обратим. Отображение $B \mapsto \widetilde{B}$ на множестве обратимых аффинных преобразований является гомоморфизмом групп* $\mathrm{Aff}(L) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $A, B : L \to L$ — аффинные преобразования, $v \in \mathbb{R}^n$, $x, y \in L$ таковы, что $\overrightarrow{xy} = v$. Тогда $\widetilde{AB}(v) = \overrightarrow{A(B(a))A(B(b))} = \tilde{A}(\overrightarrow{B(a)B(b)}) = \tilde{A}\widetilde{B}(v)$. Поскольку $\widetilde{\mathrm{id}_L} = I$ (единичный оператор), имеем $\widetilde{B}\widetilde{B^{-1}} = I$, откуда $\widetilde{B^{-1}} = \widetilde{B}^{-1}$. Следовательно, если B^{-1} существует, то $\widetilde{B}$ обратим. □