ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Свойства аффинных преобразований.

Линейным подпространством называется подмножество $V \subset \mathbb{R}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на число: $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$ и $v \in V \Rightarrow \lambda v \in V$ для всякого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пример 1. Всякое линейное подпространство содержит вектор 0. Множество $\{0\}$ — линейное подпространство. Также линейным подпространством является любая прямая $\ell_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Лемма 1. *Линейный оператор переводит линейное подпространство в линейное подпространство.*

Доказательство. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, а $V \subset \mathbb{R}^n$ подпространство. Если $v_1, v_2 \in A(V)$, то $v_1 = A(u_1)$, $v_2 = A(u_2)$. Тогда $v_1 + v_2 = A(u_1) + A(u_2) = A(u_1 + u_2) \in A(V)$. Для умножения на число — аналогично. □

Аффинным подпространством, параллельным V и проведенным через точку $a \in L$, называется множество $W \stackrel{\text{def}}{=} \{b \in L \mid \overrightarrow{ab} \in V\}$. Нетрудно убедиться (проделайте!), что если $b \in L$, то аффинное подпространство, проведенное через b и параллельное V, совпадает с W. Аффинные подпространства, параллельные $\{0\}$, это точки; подпространства, параллельные прямым, называются аффинными прямыми.

Теорема 1. *Аффинные преобразования*

1) *переводят аффинные подпространства в аффинные подпространства. Обратимые аффинные преобразоования переводят прямые в прямые.*
2) *переводят отрезки в отрезки и сохраняют отношение длин параллельных отрезков.*
3) *переводят выпуклые множества в выпуклые, а грани в грани.*

Доказательство. Пусть $B : L \to L$ — аффинное преобразование.

1: Пусть W — аффинное подпространство, параллельное линейному подпространству V. Выберем точку $a \in W$, и пусть $x \in W$ — произвольная точка. Тогда $\overrightarrow{ax} \in V$, откуда $\overrightarrow{B(a)B(x)} = \widetilde{B}(\overrightarrow{ax}) \in \widetilde{B}(V)$. Поэтому x лежит в аффинном подпространстве R, параллельном линейному подпространству (по лемме 1) $\widetilde{B}(V)$ и проходящем через точку $B(a)$. Пусть теперь $y \in R$. Тогда $\overrightarrow{B(a)y} = \widetilde{B}v$ для некоторого $v \in V$. Отсюда вытекает, что $y = B(x)$, где x такова, что $\overrightarrow{ax} = v$. Следовательно, $x \in W$, и $y \in B(W)$, то есть $B(W) = R$.

Если $V = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ — прямая, то $B(W)$ состоит из всех точек y таких, что $\overrightarrow{B(a)y} = \lambda\widetilde{B}(v)$. Если $\widetilde{B}(v) \neq 0$, эти точки образуют аффинную прямую. Если же $\widetilde{B}(v) = 0$, то $B(W)$ состоит из одной точки и, следовательно, B не обратим.

2: Пусть $y \in [x, z]$, то есть $\overrightarrow{xy} = \lambda\overrightarrow{xz}$, $0 \le \lambda \le 1$. Тогда $\overrightarrow{B(x)B(y)} = \lambda\overrightarrow{B(x)B(z)}$, то есть $B(y) \in [B(x)B(z)]$. Обратно, если $a \in [B(x)B(z)]$, то есть $\overrightarrow{B(x)a} = \lambda\overrightarrow{B(x)B(z)}$, то $a = B(y)$, где y — точка, для которой $\overrightarrow{xy} = \lambda\overrightarrow{xz}$.

Отрезки $[a, b]$ и $[c, d]$ параллельны тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{ab} = \lambda\overrightarrow{cd}$, где $\lambda = \pm |ab| / |cd|$. Но тогда $\overrightarrow{B(a)B(b)} = \widetilde{B}(\overrightarrow{ab}) = \lambda\widetilde{B}(\overrightarrow{cd}) = \lambda\overrightarrow{B(c)B(d)}$.

3 следует из 1 и 2. □

Верно и обратное:

Теорема 2. *Непрерывное взаимно однозначное отображение $B : L \to L$, переводящее каждую аффинную прямую в аффинную прямую, является аффинным.*

Доказательство. Две аффинных прямых ℓ_1, ℓ_2 называются параллельными, если они параллельны одной и той же прямой $\ell \subset \mathbb{R}^n$ и не совпадают. Нетрудно проверить (докажите!), что параллельность эквивалентна тому, что прямые лежат в одной аффинной плоскости и не пересекаются.

Пусть ℓ_1 и ℓ_2 параллельны. Тогда для любых точек $a, b \in \ell_1$, $c, d \in \ell_2$ либо прямая (ac) пересекает прямую (bd), либо (ad) пересекает (bc). Поскольку B переводит прямую в прямую, таким же свойством обладают точки $B(a), B(b), B(c), B(d)$. Отсюда следует, что прямые $B(\ell_1)$ и $B(\ell_2)$ лежат в одной плоскости. Поскольку B обратимо, они не пересекаются — следовательно, параллельны. Таким образом, B переводит параллельные прямые в параллельные.

Пусть $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{zt}$, где $x, y, z, t \in L$. Равенство означает, что прямая xy параллельна прямой zt, а прямая xz — прямой yt. Следовательно, параллельны прямые $B(x)B(y)$ и $B(z)B(t)$, а также прямые $B(x)B(z)$ и $B(y)B(t)$. Поэтому $\overrightarrow{B(x)B(y)} = \overrightarrow{B(z)B(t)}$. □

Пример 2. Преобразование $\mathbb{R}^n$, сохраняющее расстояние (движение), переводит прямую в прямую — следовательно, оно является аффинным преобразованием. То же относится к более широкому классу преобразований подобия, которые меняют все расстояния в одно и то же число раз.

Пример 3. Проекция $\mathbb{R}^3$ на плоскость Π вдоль прямой ℓ, не параллельной Π — необратимое аффинное преобразование.

Назовем набор $a_1, \dots, a_{n+1}$ точек n-мерного аффинного пространства L *набором общего положения*, если точки не лежат ни в каком собственном аффинном подпространстве в L. Отсюда вытекает, что векторы $\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_{n+1}}$ не лежат ни в каком собственном линейном подпространстве. Стандартная теорема линейной алгебры утверждает, что в таком случае произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^n$ однозначно представляется в виде $v = \lambda_2 \overrightarrow{a_1 a_2} + \dots + \lambda_{n+1} \overrightarrow{a_1 a_{n+1}}$, где $\lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ (как говорят, векторы образуют базис).

Теорема 3. *Для любых наборов $a_1, \dots, a_{n+1}$ и $b_1, \dots, b_{n+1}$ точек общего положения существует ровно одно обратимое аффинное преобразование $B : L \to L$ такое, что $B(a_i) = b_i$, $i = 1, \dots, n+1$.*

Доказательство. Отождествим L с $\mathbb{R}^n$ с помощью отображения S_{a_1}. Тогда, согласно теореме 2 лекции 2, требуется найти линейный оператор A и вектор u такие, что отображение $C(v) \stackrel{\text{def}}{=} Av + u$ переводит 0 в b_1, а каждый вектор a_i, $i = 2, \dots, n+1$, в вектор $b_i - b_1$. Из первого условия вытекает, что $u = b_1$. Для произвольного вектора $v\lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1}$ положим теперь по определению $Av = \lambda_2(b_2 - b_1) + \dots + \lambda_{n+1}(b_{n+1} - b_1)$. Нетрудно проверить (проделайте!), что так определенный оператор A — линейный, и что это единственный линейный оператор с нужным свойством. Тем самым существование и единственность доказана.

Поскольку точки $b_1, \dots, b_{n+1}$ — общего положения, векторы $b_2 - b_1, \dots, b_{n+1} - b_1$ образуют базис. Следовательно, можно построить линейный оператор A^{-1}, полагая $A^{-1}(\sum_{i=2}^{n+1} \mu_i (b_i - b_1)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=2}^{n+1} \mu_i a_i$. Отсюда вытекает, что оператор C также обратим: $C^{-1}(w) = A^{-1}(w - u)$. $\square$

Пример 4. Пусть $ABCD$ — трапеция на плоскости с основаниями AD и BC. Пусть O_1 и O_2 — середины оснований, $P = (AC) \cap (BD)$ и $Q = (AB) \cap (CD)$. Докажем известную теорему "школьной" геометрии о том, что точки P, Q, O_1, O_2 лежат на одной прямой.

Если трапеция $ABCD$ — равнобокая, то прямая O_1O_2 является ее осью симметрии. Симметрия меняет местами прямые AB и CD, а также прямые AC и BD. Поэтому точки P и Q при симметрии переходят в себя — следовательно, они лежат на оси симметрии, и для равнобокой трапеции теорема доказана.

Если аффинное преобразование φ переводит трапецию $ABDD$ в трапецию $A_1B_1C_1D_1$, то O_1 и O_2 переходят, согласно пункту 2 теоремы 1, в середины отрезков A_1D_1 и B_1C_1, точка P переходит в $P_1 = (A_1C_1) \cap (B_1D_1)$, а Q — в $(A_1B_1) \cap (C_1D_1)$. Поскольку φ переводит прямые в прямые, если теорема верна для $ABCD$, то она верна и для $A_1B_1C_1D_1$.

Для произвольной трапеции $ABCD$ рассмотрим аффинное преобразование φ, переводящее треугольник ADQ в равнобедренный — согласно теореме 3, такое преобразование существует. Поскольку φ переводит параллельные прямые в параллельные, трапеция $ABCD$ при этом перейдет в равнобокую трапецию, для которой теорема доказана — следовательно, она верна и для $ABCD$.

Рассмотрим теперь в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ множество $L \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n, 1) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Если $x, y \in L$, то $x - y \in V$, где $V \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n, 0) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^{n+1}$. Таким образом, в L имеется структура аффинного пространства.

Теорема 4. *Для всякого линейного оператора $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющего множество L (т.е. такого, что $AL \subseteq L$) его ограничение $A|_L : L \to L$ является аффинным преобразованием. Всякое аффинное преобразоваие $B : L \to L$ может быть получено таким образом. Если $B = A|_L$ обратим, то A определен однозначно и также обратим.*

Доказательство. Аффинность $A|_L$: если $x, y, z, t \in L$ и $\overrightarrow{xy} = y - x = t - z = \overrightarrow{zt}$, то $\overrightarrow{A(x)A(y)} = A(y) - A(x) = A(y - x) = A(t - z) = A(t) - A(z) = \overrightarrow{A(z)A(t)}$.

Любое аффинное преобразование B пространства L можно продолжить до преобразования $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, сохраняющего L. А именно, для вектора $v \in V$ положим $Av \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{B}v \in V$. Для любого другого вектора v существует и единственно число $\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda v \in L$. В этом случае положим $Av \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda} B(\lambda v)$. Очевидно, A сохраняет L; докажем линейность. Если v таков, что $\lambda v \in L$, и $w = \nu v$, то $\lambda/\nu w \in L$. Отсюда $A(w) = \nu/\lambda B(\lambda/\nu w) = \nu/\lambda B(\lambda v) = \nu A(v)$ — однородность доказана (случай $v \in V$ разберите самостоятельно). Если $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2 \in L$ и $v = v_1 + v_2$, то $\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} v = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1 v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2 v_2 \in L$ — это точка, делящая отрезок $[\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2]$ в отношении $\lambda_1 : \lambda_2$. Тогда $A(v) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} B(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_1 v_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \lambda_2 v_2)$ — точка, делящая в том же отношении отрезок $B([\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2]) = [B(\lambda_1 v_1), B(\lambda_2 v_2)]$ (поскольку B аффинно). То есть $A(v) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} B(\lambda_1 v_1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} B(\lambda_2 v_2)) = A(v_1) + A(v_2)$ (случай, когда $v_1 \in V$ и/или $v_2 \in V$, разберите самостоятельно).

Нетрудно видеть, что если B обратим, то оператор A, полученный предыдущей конструкцией, также обратим. Пусть теперь $B = A|_L = A_1|_L$. Тогда оператор $C \stackrel{\text{def}}{=} A_1 A^{-1}$ переводит каждую точку $x \in L$ в себя. Если $v \in V$, то существуют $x_1, x_2 \in L$ такие, что $v = x_1 - x_2$; отсюда $Cv = Cx_1 - Cx_2 = x_1 - x_2 = v$. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ стандартный базис $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$; тогда $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис в V, а вектор e_{n+1} принадлежит L. Векторы базиса $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$ остаются неподвижными при преобразовании C. Произвольный вектор $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ представим в виде $v = \sum_i \lambda_i e_i$, и поэтому также остается на месте. Следовательно, C — единичный оператор, и $A = A_1$. $\square$