ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Проективные пространства.

Определение 1. Проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ называется множество прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало координат.

Определение 2. Проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ называется множество классов эквивалентности на множестве $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ по следующему отношению: $(v_0,\dots,v_n)\sim(w_0,\dots,w_n)$, если существует $\lambda\in\mathbb{R}$ такое, что $w_i=\lambda v_i$ для всех $i=0\dots,n$.

Очевидно, векторы $v=(v_0,\dots,v_n)\neq 0$ и $w=(w_0,\dots,w_n)\neq 0$ эквивалентны тогда и только тогда, когда лежат на одной прямой, проходящей через начало координат. Тем самым оба определения задают одно и то же понятие. Если $\ell\in\mathbb{R}P^n$ — прямая, и $v\in\ell$, $v=(v_0,\dots,v_n)\neq 0$, то $v_0,\dots,v_n$ называются однородными координатами прямой ℓ. Однородные координаты определены с точностью до умножения на общий ненулевой множитель; запись: $\ell=[v_0:\dots:v_n]$.

Заменяя все действительные числа в определении 2 комплексными, получим определение комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$.

Предложение 1. *Пространство (проективная прямая) $\mathbb{R}P^1$ гомеоморфно окружности, а пространство $\mathbb{C}P^1$ — двумерной сфере.*

Доказательство. $\mathbb{R}P^1$: пусть $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}$ — окружность единичного радиуса, касающаяся оси абсцисс в начале координат. Ось абсцисс пересекает Ω в начале координат, а любая другая прямая ℓ — в начале координат и еще одной точке $p(\ell)\in\Omega$. Очевидно, сопоставив прямой $\ell\in\mathbb{R}P^1$ точку $p(\ell)\in\Omega$ (а оси абсцисс — начало координат $0\in\Omega$), мы получим требуемый гомоморфизм. В явном виде отображение сопоставляет прямой $[a:b]\in\ell$ точку $\left(\frac{2ab}{a^2+b^2},\frac{2b^2}{a^2+b^2}\right)$ (проверьте!).

$\mathbb{C}P^1$: реализуем двумерную сферу Ω как подмножество $\mathbb{C}^2$, заданное условиями $|z|^2+|w-1|^2=1$, $w=\bar{w}$ (т.е. $w\in\mathbb{R}$). Точка $(\lambda a,\lambda b)$ прямой $[a:b]$ принадлежит Ω, если $\lambda=0$ или $\lambda=\frac{2\bar{b}}{|a|^2+|b^2|}$. Таким образом, прямая пересекает сферу в начале координат и в точке $p(a,b)=\left(\frac{2a\bar{b}}{|a|^2+|b^2|},\frac{2|b|^2}{|a|^2+|b^2|}\right)$. Соответствие $[a:b]\to p(a,b)$ это и есть требуемый гомеоморфизм. Действительно, его образом является вся сфера Ω, поскольку через каждую точку $x\in\Omega$, $x\neq(0,0)$, проходит ровно одна прямая $\ell\in\mathbb{C}P^1$, а $(0,0)=p(1,0)$. □

Предложение 2. *Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно n-мерной сфере, у которой попарно отождествлены диаметрально противоположные точки. Также $\mathbb{R}P^n$ гомеоморфно n-мерному шару, у которого попарно отождествлены диаметрально противоположные точки границы.*

Доказательство. Прямая в $\ell\subset\mathbb{R}^{n+1}$, такая что $v=(v_0,\dots,v_n)\in\ell$, $v\neq 0$, пересекается со сферой $\Omega=\{w\mid |w|=1\}$ в двух диаметрально противоположных точках: $w_\pm=\pm v/|v|$. Этим доказано первое утверждение.

Если прямая ℓ не лежит в гиперплоскости $x_0=0$, то из двух точек $w_\pm\in\ell\cap\Omega$ ровно у одной первая координата положительна; для определенности пусть это $w_+=(w_0,\dots,w_n)$. Тогда точка $p(\ell)=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{R}^n$ обладает свойством $w_1^2+\dots+w_n^2=1-w_0^2<1$, то есть лежит во внутренности единичного шара. Если же $w_\pm=\pm(0,w_1,\dots,w_n)$, то в качестве $p(\ell)$ нужно взять пару диаметрально противоположных точек $\pm(w_1,\dots,w_n)$, лежащих на границе шара. □

Пусть $L\subset\mathbb{R}^{n+1}$ — гиперплоскость, заданная условием $x_0=1$, а $L_0\subset\mathbb{R}^{n+1}$ — параллельная ей линейная гиперплоскость $x_0=0$. Все прямые $\ell\in\mathbb{R}P^n$ разбиваются на два класса: $A^n=\{\ell\not\subset L_0\}=\{[x_0:x_1:\dots:x_n]\mid x_0\neq 0\}$ и $\mathbb{R}P^n\setminus A^n=\{\ell\subset L_0\}=\{[0:x_1:\dots:x_n]\}$. Если $\ell\not\subset L_0$, то $\ell\cap L$ состоит из одной точки $\ell\cap L=(1,x_1/x_0,\dots,x_n/x_0)$. Таким образом, определено взаимно однозначное отображение $\varrho:A^n\to\mathbb{R}^n$, заданное формулой $\varrho([x_0:x_1:\dots:x_n])=(x_1/x_0,\dots,x_n/x_0)$. Прямые $\ell\subset L_0$ образуют, очевидно, проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$; точнее, взаимно однозначное отображение $\varrho:\mathbb{R}P^n\setminus A^n\to\mathbb{R}P^{n-1}$ определено формулой $\varrho([0:x_1:\dots:x_n])=[x_1:\dots:x_n]$.

Координаты вектора $\varrho(x)$ называются неоднородными координатами точки $x\in A^n\subset\mathbb{R}P^n$. Вместо w_0 можно использовать любую другую неоднородную координату x_k, $k=1,\dots,n$. Таким образом, в $\mathbb{R}P^n$ имеется $n+1$ набор неоднородных координат — k-й набор $(k=1,\dots,n+1)$ определен для точек с $x_k\neq 0$. Иными словами, проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ покрывается (с пересечениями) объединением $n+1$

аффинного подпространства размерности n: $P^n = A_0^n \cup \dots \cup A_n^n$. Заметим также, что разложение $\mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^{n-1} \sqcup A^n$ можно продолжить по индукции: $\mathbb{R}P^n = A^n \sqcup A^{n-1} \sqcup \dots \sqcup A^1 \sqcup \mathbb{R}P^0$; последнее пространство состоит из одной точки. Аналогичная конструкция для $\mathbb{C}P^n$ дает разбиение на комплексные аффинные пространства (изоморфные $\mathbb{C}^k$ для $k = 1, \dots, n$)

В случае $\mathbb{R}P^1$ и $\mathbb{C}P^1$ разбиение $P^1 = A^1 \sqcup P^0$ это разбиение окружности (соотв., двумерной сферы) на точку и все остальное. Иными словами, $\mathbb{R}P^1$ состоит из точек вида $[x : y] \sim [1 : y/x]$ с $x \neq 0$ и точки $[0 : y] \sim [0, 1]$. При этом $\varrho([x : y]) = y/x$ при $x \neq 0$; удобно обозначить $\varrho([0 : 1]) = \infty$. Таким образом, $\varrho(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, и аналогично, $\varrho(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

В случае $\mathbb{R}P^2 = A^2 \sqcup \mathbb{R}P^1$ мы получаем (с точностью до гомеоморфизма) разбиение на открытый круг (которому гомеоморфно A^2) и окружность. Однако эти части "прилегают" друг к другу нетривиальным образом:

Предложение 3. *Малая окрестность $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$ гомеоморфна ленте Мебиуса.*

Доказательство. Из доказательства предложения 2 вытекает, что указанная окрестность гомеоморфна множеству $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, -\varepsilon \le z \le \varepsilon\}$, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки. Тем самым окрестность, гомеоморфна "полоске" $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, -\varepsilon \le z \le \varepsilon, y \le 0\}$, у которой точки границы отождествлены с перекруткой: $(x, 0, z) \sim (-x, 0, -z)$ (а остальные точки ни с чем не отождествляются). Это и есть лента Мебиуса. □

Всякое обратимое линейное преобразование $A : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ переводит прямые в прямые и, тем самым, порождает преобразование $\overline{A} : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$. Такие преобразования называются проективными.

Теорема 1. $\overline{A_1} = \overline{A_2}$ *тогда и только тогда, когда $A_1(v) = \lambda A_2(v)$ для всех $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ и некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Очевидно, если $A_1(v) = \lambda A_2(v)$, то для всякой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (проходящей через начало координат) прямые $\overline{A_1}(\ell)$ и $\overline{A_2}(\ell)$ совпадают. Обратно, пусть $\overline{A_1}(\ell) = \overline{A_2}(\ell)$. Тогда линейное преобразование $X = A_1 A_2^{-1}$ оставляет все прямые на месте. Тем самым $Xv = \lambda v$ для каждого $v \in \mathbb{R}^{n+1}$, и нужно доказать, что λ для всех v одно и то же. Пусть $Xv_1 = \lambda_1 v_1$, $Xv_2 = \lambda_2 v_2$, и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда векторы v_1 и v_2 не пропорциональны. С другой стороны $X(v_1 + v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \Rightarrow (\lambda - \lambda_1) v_1 = (\lambda_2 - \lambda) v_2$. Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, среди чисел $\lambda - \lambda_1$ и $\lambda_2 - \lambda$ хотя бы одно отлично от нуля — следовательно, векторы v_1 и v_2 пропорциональны. Противоречие. □

Аналогичная теорема (с буквально тем же доказательством) верна и для $\mathbb{C}P^n$.

Замечание. Проективное преобразование $\overline{A}$ всегда обратимо, поскольку линейное преобразование A обратимо.

Пусть теперь $n = 1$, и $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — линейное преобразование. Рассмотрим в $\mathbb{R}^2$ векторы $e_1 \stackrel{\text{def}}{=} (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ (стандартный базис), тогда произвольный вектор $v = (x, y)$ является их однозначно определенной линейной комбинацией: $v = xe_1 + ye_2$. Если $Ae_1 = de_1 + be_2$, $Ae_2 = ce_1 + ae_2$, то $Av = xAe_1 + yAe_2 = (dx + cy)e_1 + (bx + ay)e_2$. Преобразование A обратимо, если векторы Ae_1 и Ae_2 не коллинеарны, то есть $ad - bc \neq 0$ (убедитесь!).

Теперь: $\overline{A}([x : y]) = [dx + cy : bx + ay]$. Отсюда если $z \neq -d/c$, то $\varrho \circ \overline{A} \circ \varrho^{-1}(z) = \varrho(\overline{A}([1 : z])) = \varrho([az + b : cz + d]) = (az + b)/(cz + d)$. Также имеем $A([1 : -d/c]) = [(ad - bc)/c : 0] = [1 : 0]$, так что $\varrho \circ \overline{A} \circ \varrho^{-1}(-d/c) = \infty = \lim_{z \to -d/c} (az + b)/(cz + d)$. И, наконец, $\varrho \circ \overline{A} \circ \varrho^{-1}(\infty) = \varrho(\overline{A}([0 : 1])) = \varrho([a : c]) = a/c = \lim_{z \to \infty} (az + b)/(cz + d)$. Таким образом, $\varrho \circ \overline{A} \circ \varrho^{-1}$ это дробно-линейное преобразование $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, продолженное по непрерывности на $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Условие $ad - bc \neq 0$ означает, что $(az + b)/(cz + d) \neq const$.

Очевидно, для $\mathbb{C}P^1$ результат такой же, только $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.