ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Проективные преобразования.

Предложение 1. *Для любых трех попарно различных точек $p, q, r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ существует и единственно дробно-линейное преобразование φ, переводящее их в точки $0, 1, \infty$.*

Доказательство. Если $p, q, r \in \mathbb{R} \subset \mathbb{R}P^1$, то условия $\varphi(p) = 0$, $\varphi(r) = \infty$ выполнены тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = \lambda(z-p)/(z-r)$. Поскольку $\varphi(q) = 1$, нужно взять $\lambda = (q-r)/(q-p)$. Случай, когда $p = \infty$, $q = \infty$ или $r = \infty$ — упражнение. □

Следствие. *Для любых двух троек $p_1, q_1, r_1 \in \mathbb{R}P^1$, $p_2, q_2, r_2 \in \mathbb{R}P^1$ попарно различных точек существует и единственно проективное преобразование φ такое, что $\varphi(p_1) = p_2$, $\varphi(q_1) = q_2$, $\varphi(r_1) = r_2$.*

Пусть $p, q, r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, а φ — дробно-линейное преобразование из предложения 1. Тогда для всякого $s \in \mathbb{R}P^1$ величина $\varphi(s) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется двойным отношением точек p, q, r, s и обозначается $[p, q, r, s]$. Согласно формуле из предложения 1, $[p, q, r, s] = \frac{(s-p)(q-r)}{(s-r)(q-p)}$, когда $p, q, r, s \in \mathbb{R}$. Двойное отношение переносится на $\mathbb{R}P^1$ с помощью отображения ϱ: если $p, q, r, s \in \mathbb{R}P^1$, то $[p, q, r, s] \stackrel{\text{def}}{=} [\varrho(p), \varrho(q), \varrho(r), \varrho(s)]$.

Предложение 2. *Проективное преобразование $\varphi : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ сохраняет двойное отношение: $[p, q, r, s] = [\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r), \varphi(s)]$. Любое преобразование $\varphi : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$, сохраняющее двойное отношение, является проективным.*

Доказательство. Пусть $\psi(\varrho(p)) = 0$, $\psi(\varrho(q)) = 1$, $\psi(\varrho(r)) = \infty$, тогда $\psi(\varrho(s)) = [p, q, r, s]$. В то же время $(\psi \circ \varrho \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = 0$, $(\psi \circ \varrho \circ \varphi^{-1})(\varphi(q)) = 1$, $(\psi \circ \varrho \circ \varphi^{-1})(\varphi(r)) = \infty$, откуда $[p, q, r, s] = \psi(\varrho(s)) = (\psi \circ \varrho \circ \varphi^{-1})(\varphi(s)) = [\varphi(p), \varphi(q), \varphi(r), \varphi(s)]$.

По определению, $[0, 1, \infty, x] = x$ для всякого $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Пусть $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \varrho \circ \varphi \circ \varrho^{-1} : \mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ сохраняет двойное отношение, и $\Phi(0) = p$, $\Phi(1) = q$, $\Phi(\infty) = r$. Очевидно, точки p, q, r попарно различны (докажите!). Дробно-линейное преобразование ψ, переводящее p, q, r в $0, 1, \infty$, сохраняет двойное отношение. Следовательно, $\chi = \psi \circ \Phi$ сохраняет двойное отношение и переводит $0, 1, \infty$ в себя. Следовательно, $\chi(z) = [0, 1, \infty, \chi(z)] = [0, 1, \infty, z] = z$ для всякого $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Иными словами, $\chi = \mathrm{id} \Rightarrow \Phi = \psi^{-1}$ — дробно-линейное преобразование. Следовательно, φ проективно. □

Понятие двойного отношения и предложения 1 и 2 переносятся без изменений на случай комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. В частности, определено взаимно однозначное соответствие $\varrho : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Предложение 3. *$[p, q, r, s] \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда когда либо точки $p, q, r, s \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}P^1$ лежат на одной окружности, либо когда одна из точек равна ∞, а три оставшиеся лежат на одной прямой.*

Доказательство. Пусть $p, q, r, s \in \mathbb{C}$. Тогда $\frac{(s-p)(q-r)}{(s-r)(q-p)} \in \mathbb{R}$, если и только если аргументы комплексных чисел $(s-p)/(s-r)$ и $(q-p)/(q-r)$ либо совпадают, либо отличаются знаком. Таким образом, угол psr либо равен углу pqr, либо их сумма равна π. В обоих случаях точки лежат на одной окружности.

Если $s = \infty$, то $[p, q, r, s] = (q-r)/(q-p) \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда точки p, q, r лежат на одной прямой. Случаи $p = \infty$, $q = \infty$ и $r = \infty$ аналогичны. □

Следствие. *Дробно-линейное преобразование $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ переводит окружности и прямые в окружности и прямые.*

Оказывается, верно и обратное утверждение:

Предложение 4. *Если обратимое преобразование $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ переводит окружности и прямые в окружности и прямые, то оно является либо дробно-линейным, либо композицией дробно-линейного и преобразования $z \mapsto \overline{z}$ (симметрии относительно вещественной оси).*

Доказательство. Пусть $A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — такое преобразование. Пусть B — дробно-линейное преобразование, для которого $B(A(0)) = 0$, $B(A(1)) = 1$ и $B(A(\infty)) = \infty$. Тогда $C = B \circ A$ переводит окружности в окружности и прямые в прямые — следовательно, C аффинно. Центр окружности делит любую хорду, проведенную через него, пополам; все остальные точки плоскости не обладают этим свойством. Аффинное преобразование переводит середину отрезка в середину; поэтому C переводит центр окружности в центр ее образа.

Преобразование C переводит точки 0 и 1 в себя. В силу аффинности то же самое верно для произвольной точки $x \in \mathbb{R}$. Для произвольной точки $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ проведем окружности с центрами в 0 и 1, пересекающиеся в x; вторая их точка пересечения это $\overline{x}$. Проведенные окружности, согласно сказанному выше, переходят в себя. Поэтому $C(x) = x$ или $C(x) = \overline{x}$. Поскольку аффинное преобразование полностью определяется образами трех неколлинеарных точек (0, 1 и x), в первом случае $C = \mathrm{id}$, а во втором $C(z) = \overline{z}$ для всякого $z \in \mathbb{C}$. Поскольку $A = B \circ C$, предложение доказано. □

Теорема 1. *Пусть $\varphi : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}P^n$ — проективное преобразование, для которого $\varphi(A^n) = A^n$ (и, соответственно, $\varphi(\mathbb{R}P^{n-1}) = \mathbb{R}P^{n-1}$). Тогда $\varrho \circ \varphi|_{A^n} \circ \varrho^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — обратимое аффинное преобразование. Всякое обратимое аффинное преобразование можно получить таким способом, причем ровно из одного проективного преобразования, сохраняющего A^n.*

Доказательство. Как и раньше, обозначим $L_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ гиперплоскость $x_0 = 0$, а $L \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — аффинную гиперплоскость $x_0 = 1$.

Пусть $\varphi = \overline{\Phi}$, где $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — обратимое линейное преобразование. Поскольку $\varphi(\mathbb{R}P^{n-1}) = \mathbb{R}P^{n-1}$, имеем $\Phi(L_0) = L_0$. Отсюда вытекает, что $\Phi(L)$ — аффинная гиперплоскость, параллельная L_0 (почему?), то есть гиперплоскость $x_0 = a$ для некоторого $a \neq 0$. Но тогда преобразование $\Phi_1 = \Phi/a$ переводит в L в себя, и $\overline{\Phi_1} = \varphi$. Тем самым, если проективное преобразование $\overline{\Phi}$ сохраняет A^n, можно без ограничения общности считать, что Φ сохраняет L.

Для всякой плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $\Pi \not\subset L_0$, множество $\varrho(\Pi \cap L)$ — аффинная прямая (докажите!). Поэтому преобразование $\varrho \circ \varphi \circ \varrho^{-1}$ переводит аффинные прямые в аффинные прямые и, следовательно, является аффинным.

Согласно теореме 4 лекции 3, для всякого обратимого аффинного преобразования $B : L \to L$ существует и единственно линейное преобразование $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, для которого $\Phi(L) = L$ и $B = \Phi|_L$. Тогда $B = \varrho \circ \overline{\Phi} \circ \varrho^{-1}$. □

Проективным подпространством $\overline{L} \subset \mathbb{R}P^n$ называется множество прямых $\ell \subset L \subset \mathbb{R}^{n+1}$, где L — какое-нибудь линейное подпространство. Размерностью $\overline{L}$ называется $\dim L - 1$; в частности, если L — плоскость, то $\overline{L}$ называется проективной прямой (в $\mathbb{R}P^n$).

Назовем набор $a_1, \dots, a_{n+2} \in \mathbb{R}P^n$ набором точек общего положения, если никакие $n+1$ из них не лежат в собственном проективном подпространстве $H \subset \mathbb{R}P^n$.

Пример 1. $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}P^1$ — набор общего положения, если точки попарно различны (точка это проективное подпространство $\mathbb{R}P^0$). $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}P^2$ — набор общего положения, если никакие три точки не лежат на одной прямой.

Теорема 2. *Для любых двух наборов $a_1, \dots, a_{n+2}$ и $b_1, \dots, b_{n+2}$ точек общего положения существует ровно одно проективное преобразование $B \in \mathrm{PGL}(n)$, переводящее $a_i \mapsto b_i$, $i = 1, \dots, n+2$.*

Доказательство. Выберем ненулевые векторы $u_i \in a_i$, $v_i \in b_i$, $i = 1, \dots, n+2$. Поскольку точки $a_1, \dots, a_{n+1}$ не лежат в собственном проективном подпространстве, векторы $u_1, \dots, u_{n+1}$ образуют базис в $\mathbb{R}^{n+1}$. Поэтому найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$ такие, что $u_{n+2} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{n+1} u_{n+1}$. Если $\lambda_k = 0$ для какого-либо k, то $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+2}$ лежат в подпространстве $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$, состоящем из всех линейных комбинаций n векторов $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_{n+1}$. Линейные комбинации $n < n+1$ векторов не могут породить $\mathbb{R}^{n+1}$, поэтому $H \neq \mathbb{R}^{n+1}$, что противоречит условию общего положения для точек $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{n+2}$. Следовательно, среди $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ нет нулей. Аналогично, найдутся $\mu_1, \dots, \mu_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такие, что $v_{n+2} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n+1} v_{n+1}$.

Определим линейный оператор $X : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ равенствами $X u_i = \mu_i / \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n+1$. Поскольку $u_1, \dots, u_{n+1}$ — базис, эти условия определяют X однозначно. Поскольку $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, оператор X обратим. Очевидно, $\overline{X}(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, n+1$. Теперь $X u_{n+2} = \sum_i \lambda_i X u_i = \sum_i \mu_i v_i = v_{n+2}$. Отсюда вытекает, что $\overline{X}(a_{n+2}) = b_{n+2}$.

С другой стороны, если $\overline{Y}(a_i) = b_i$ при $i = 1, \dots, n+2$, то $Y u_i = y_i v_i$ для всех i. Условие $Y u_{n+2} = y_{n+2} v_{n+2}$ означает, что $\sum_{i=1}^{n+1} y_i \lambda_i v_i = y_{n+2} \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i v_i$. Поскольку $v_1, \dots, v_{n+1}$ — базис, получаем $y_i = \mu_i / \lambda_i y_{n+2}$, откуда следует, что $\overline{Y} = \overline{X}$. □

Вот пример применения теоремы 2:

Теорема (Дезарга). *Пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке. Тогда точки пересечения прямых $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.*

Доказательство. Утверждение теоремы Дезарга является проективно инвариантным — если оно верно для какой-либо конфигурации, то верно и для всех конфигураций, получающихся из данной проективным преобразованием. В силу теоремы 2 можно проективным преобразованием отправить две произвольных точки на бесконечно удаленную прямую. Сделаем это с точками $ab \cap a'b'$ и $bc \cap b'c'$. Тогда получится такое (очевидное) утверждение: пусть прямые aa', bb' и cc' пересекаются в точке o, прямая ab параллельна прямой $a'b'$, прямая bc параллельна прямой $b'c'$. Тогда прямая ac параллельна прямой $a'c'$. $\square$