ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Основные модели плоскости Лобачевского. Аффинные преобразования в модели Пуанкаре в полуплоскости.

Плоскостью Лобачевского называется множество Π, элементы которого называются точками, в котором выделен некоторый класс подмножеств, называемых прямыми, и определена функция $\varrho : \Pi \times \Pi \to \mathbb{R}$ двух аргументов, называемая расстоянием между точками. Эта система (подмножества плюс функция) должна удовлетворять некоторому набору требований, называемых аксиомами. Мы будем формулировать аксиомы постепенно. В аксиомах первой группы не упоминается расстояние, а только точки и прямые:

A1. Через любые две различные точки проходит ровно одна прямая.

A2. Через прямую ℓ и точку a, ей не принадлежащую, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих ℓ.

(мы опускаем аксиомы типа "плоскость и прямая непусты, прямая не совпадает со всей плоскостью").

В аксиомах не указывается, какое конкретно множество является "плоскостью", и какие его подмножества — "прямыми". Этот вопрос можно решить по-разному:

Пример 1 (модель Пуанкаре в полуплоскости). $\Pi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ — верхняя полуплоскость. Прямыми называются дуги окружностей, центр которых лежит на оси абсцисс (границе полуплоскости), а также вертикальные открытые лучи (перпендикулярные границе).

Аксиома A2 очевидна. Аксиома A1: пусть $a, b \in \Pi$. Проведем серединный перпендикуляр к отрезку $[a,b]$. Если он параллелен границе полуплоскости, то a и b лежат на одном вертикальном луче. Если он пересекает границу в точке p, то a и b лежат на одной полуокружности с центром p и радиусом ap.

Пример 2 (модель Пуанкаре в круге). Π — единичный открытый круг на плоскости с центром в начале координат. Прямые — дуги окружностей, лежащие внутри круга и пересекающие его границу под прямым углом, а также диаметры круга. Аксиома A2 очевидна. Аксиома A1: рассмотрим точки $a, b \in \Pi$ и точку a', лежащую на луче $0a$ на расстоянии $1/|a|$ от точки 0. Через точки a, b и a' проходит единственная окружность или прямая ω. Случай, когда ω — прямая, очевиден. Если ω — окружность, то, поскольку $a' \notin \Pi$, ω пересекает границу Π в двух точках, c и d. Поскольку $|c|^2 = 1 = |a|\,|a'|$, прямая $0c$ является касательной к окружности ω. Тем самым ω пересекает границу Π под прямым углом.

Пример 3 (модель Клейна). Π — единичный открытый круг на плоскости с центром в начале координат. Прямые — хорды круга. Аксиомы A1–A2 очевидны.

Пример 4 (двуполостной гиперболоид). $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1, z \geq 0\}$ — одна из полостей двуполостного гиперболоида. Прямые это пересечения Π с плоскостями, проходящими через начало координат. Аксиома A1: пусть $a, b \in \Pi$. Если a, b, O лежат на одной прямой, координаты a и b пропорциональны: $a = (x,y,z)$, $b = (tx, ty, tz)$, $t > 0$. Но тогда $(tx)^2 + (ty)^2 - (tz)^2 = -t^2 = -1$, откуда $t = 1$, то есть $a = b$. Следовательно, через O, a и b можно провести единственную плоскость, пересечение которой с гиперболоидом и есть требуемая прямая.

Аксиома A2: заметим, что прямая ℓ представляет собой гиперболу, не проходящую через начало координат. В плоскости L, соответствующей прямой ℓ, проведем через начало координат прямую μ, не пересекающую ℓ. Проведем теперь плоскость M через точку a и прямую μ — она пересекает L по прямой μ и тем самым $M \cap L \cap \Pi = \varnothing$.

Разумеется, мы пока не можем утверждать, что примеры 1–4 дают модель геометрии Лобачевского — для этого мы должны сформулировать остальные аксиомы и задать в этих моделях расстояние. Докажем пока что, что эти примеры дают модель одной и той же геометрии — между ними можно установить взаимно однозначное соответстие, сохраняющее понятие прямой.

Соответствие 1. Полуплоскость — круг.

Отождествим плоскость с множеством $\mathbb{C}$ комплексных чисел, полуплоскость — с верхней полуплоскостью $H = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0\}$, а круг — с единичным кругом $\Omega = \{z \mid |z| < 1\}$ с центром в нуле. Положим $f(z) = (z-i)/(z+i)$. Если $\operatorname{Re} z > 0$, то $|z-i| < |z+i|$, откуда $|f(z)| < 1$. Таким образом, $f(H) \subset \Omega$. Если $w = (z-i)/(z+i)$, то $z(w-1) = -i(w+1)$, откуда $z = -i(w+1)/(w-1)$ — отображение, обратное к f. Точки 1 и -1 — концы диаметра круга Ω. Если $w \in \Omega$, то векторы $w-1$ и $w+1$ образуют тупой угол. Следовательно, $\operatorname{Re}(-i(w+1)/(w-1)) = -\operatorname{Im}((w+1)/(w-1)) > 0$. Таким образом, $f : H \to \Omega$ — взаимно однозначное отображение.

Преобразование f — дробно-линейное, поэтому образами прямых Лобачевского в H являются дуги окружностей или хорды в Ω. Если $\omega \subset \mathbb{C}$ — окружность или прямая, то $\omega \cap H$ является прямой Лобачевского тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \omega$, где $c(z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{z}$ — преобразование комплексного сопряжения, т.е. симметрии относительно действительной оси. Имеем $(f \circ c)(z) = f(\overline{z}) = \frac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i} = \overline{\frac{z+i}{z-i}} = (\nu \circ f)(z)$, где $\nu(w) \stackrel{\text{def}}{=} 1/\overline{w}$ — инверсия относительно единичной окружности ω с центром в нуле. Отсюда вытекает, что образы прямых Лобачевского в полуплоскости при отображении f — дуги кривых или хорды, инвариантные относительно ν.

Лемма 1. *Если окружность ψ инвариантна относительно ν, то ψ и ω пересекаются под прямым углом.*

Доказательство. Имеем $\nu(w) = w/|w|^2$. Поэтому $\nu(a) = a$ для всех $a \in \omega$, и $\nu(\ell) = \ell$, где ℓ — прямая, проходящая через нуль. Пусть $a \in \psi \cap \omega$. Проведем прямую ℓ через 0 и a, и пусть $\ell \cap \psi = \{a, b\}$. Поскольку $\omega(\psi) = \psi$, $\omega(\ell) = \ell$ и $\omega(a) = a$, имеем $\omega(b) = b$, что возможно только если $b = a$. Таким образом, прямая ℓ — касательная к окружности ψ, откуда вытекает, что ψ и ω пересекаются под прямым углом, □

Тем самым если ψ инвариантна относительно ν, то $\Omega \cap \psi$ — прямая Лобачевского. Таким образом, f переводит прямые в прямые.

Соответствие 2. Круг (модель Пуанкаре) — круг (модель Клейна).

Возьмем точку $c \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим произвольную прямую ℓ в смысле модели Пуанкаре такую, что $c \in \ell$. Прямая ℓ это дуга с концами $a, b \in \omega$; возьмем в качестве $f(c)$ точку пересечения прямой $0c$ с хордой ab.

Очевидно по построению, что f переводит прямые Пуанкаре в прямые Клейна. Поэтому в проверке нуждается только корректность определения: нужно проверить, что точка $f(c)$ не зависит от выбора дуги $\ell \ni c$.

Лемма 2. *Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — окружности на плоскости, причем $\omega_1 \cap \omega_2 = \{a_{12}, b_{12}\}$, $\omega_2 \cap \omega_3 = \{a_{23}, b_{23}\}$, $\omega_1 \cap \omega_3 = \{a_{13}, b_{13}\}$. Тогда прямые $(a_{12}b_{12})$, $(a_{23}b_{23})$, $(a_{13}b_{13})$ пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Пусть окружность ω_i задается на плоскости уравнением $(x-p_i)^2 + (y-q_i)^2 = r_i^2$; здесь $i = 1, 2, 3$ Рассмотрим множества $\ell_{12}, \ell_{23}, \ell_{13}$, заданные уравнениями $\ell_{ij} : (x-p_i)^2 + (y-q_i)^2 - r_i^2 = (x-p_j)^2 + (y-q_j)^2 - r_j^2$. Эти уравнения линейны (члены x^2, y^2 сокращаются!), поэтому множества ℓ_{ij} — прямые. Очевидно также, что $a_{ij}, b_{ij} \in \ell_{ij}$, и поэтому ℓ_{ij} это прямая $(a_{ij}b_{ij})$. Точка пересечения $\ell_{12} \cap \ell_{23}$ удовлетворяет равенствам $(x-p_1)^2+(y-q_1)^2-r_1^2 = (x-p_2)^2+(y-q_2)^2-r_2^2 = (x-p_3)^2+(y-q_3)^2-r_3^2$, и поэтому принадлежит также и ℓ_{13}. □

Пусть теперь ψ_1, ψ_2 — окружности, пересекающие ω под прямым углом в точках a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно; пусть $c = \psi_1 \cap \psi_2 \cap \Omega$. Согласно лемме 1 $\nu(c)$ — другая точка пересечения ψ_1 и ψ_2 (лежащая вне Ω). Точки c и $\nu(c)$ лежат на прямой ℓ, проходящей через начало координат. Согласно лемме 2 хорды a_1b_1 и a_2b_2 пересекаются в точке, лежащей на прямой ℓ. Отсюда, очевидно, вытекает, что отображение f определено корректно.

Соответствие 3. Гиперболоид — круг (модель Клейна).

Точке $a \in \Pi$ сопоставим ее проекцию (из начала координат) на плоскость $z = 1$. Тогда образом Π будет круг $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < 1, z = 1\}$, а образами прямых — пересечения этого круга и плоскостей, проходящих через начало координат, т.е. хорды.

Абсолютом в модели Пуанкаре в полуплоскости называется вещественная ось; в модели в круге (Пуанкаре или Клейна) — граница круга. Нетрудно видеть, что соответствия 1 и 2 продолжаются на абсолют и переводят абсолют в абсолют.

Отображение плоскости Лобачевского в себя называется аффинным, если оно непрерывно и переводит прямые в прямые. Мы опишем аффинные преобразования в модели Пуанкаре в полуплоскости (пример 1).

Предложение 1. *Любое преобразование вида $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc > 0$, а также любое преобразование вида $f(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc < 0$, является аффинным в модели Пуанкаре в полуплоскости.*

Доказательство. Рассмотрим первый случай (дробно-линейные преобразования); второй случай аналогичен. Дробно-линейное преобразование переводит окружности и прямые в окружности и прямые. Поскольку $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, вещественная ось переходит в вещественную ось; следовательно, верхняя полуплоскость H переходит либо в себя, либо в нижнюю полуплоскость. Поскольку $f(i) = \frac{bd+ac}{c^2+d^2} + i\frac{ad-bc}{c^2+d^2} \in H$, получаем $f(H) = H$.

Если ω — окружность или прямая, то $\omega \cap H$ — прямая Лобачевского тогда и только тогда, когда $c(\omega) = \omega$, где c — комплексное сопряжение. Поскольку $f \circ c = c \circ f$, преобразование f переводит прямые Лобачевского в прямые Лобачевского. □

Преобразования, упомянутые в предложении 1, будем называть аффинными преобразованиями стандартного вида.

Прямые Лобачевского называются параллельными, если они имеют общую точку на абсолюте (в примерах 1, 2 и 3); в примере 4 прямые параллельны, если соответствующие им плоскости в $\mathbb{R}^3$ пересекаются по образующей конуса $x^2+y^2-z^2=0$. Если прямые не пересекаются и не параллельны, они называются расходящимися.

Предложение 2. *Аффинное преобразование плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре в полуплоскости) переводит параллельные прямые в параллельные. Оно непрерывно продолжается на абсолют и однозначно определяется своим ограничением на абсолют.*

Доказательство. Пусть $\Phi : H \to H$ — аффинное преобразование, а ℓ_1, ℓ_2 — параллельные прямые. Тогда прямые $\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2)$ не имеют общих точек, т.е. либо параллельны, либо расходятся.

Обозначим $M(\ell_1, \ell_2)$ множество прямых, пересекающих ℓ_1, но не пересекающих ℓ_2. Отображение Φ гомеоморфно отображает множество $M(\ell_1, \ell_2)$ в множество $M(\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2))$. Но для параллельных прямых m_1, m_2 множество $M(m_1, m_2)$ линейно связно, а для расходящихся — нет (докажите!). Поэтому прямые $\Phi(\ell_1), \Phi(\ell_2)$ параллельны.

Пусть a — точка абсолюта. Рассмотрим прямую ℓ, проходящую через a, и выберем в качестве $\Phi(a)$ точку пересечения прямой $\Phi(\ell)$ с абсолютом (чтобы понять, какую из двух, ℓ нужно ориентировать). Поскольку Φ переводит параллельные прямые в параллельные, результат не зависит от выбора прямой $\ell \ni a$.

Последнее утверждение леммы следует из того, что всякая точка плоскости Лобачевского может быть представлена как пересечение прямых, а прямая полностью определяется своим пересечением с абсолютом.

□

Следствие 1 (предложений 1 и 2). *Для любых трех различных точек абсолюта существует аффинное преобразование стандартного вида, переводящее эти точки в 0, 1 и ∞.*

Доказательство. Для любых трех различных точек $p, q, r \in \mathbb{R}$ существует дробно-линейное преобразование $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, где $ad-bc \neq 0$ и $f(p)=0$, $f(q)=1$, $f(r)=\infty$. Если $ad-bc>0$, то оно является аффинным. Если $ad-bc<0$, нужно взять преобразование $z \mapsto f(\bar{z})$. □

Предложение 3. *Если аффинное преобразование Φ оставляет три различные точки абсолюта на месте, то оно является тождественным.*

Для доказательства нам потребуется

Лемма 3. *Если $\psi_1 \subset H$ — прямая Лобачевского, пересекающая абсолют в точках p, q, а $\psi_2 \subset H$ — прямая Лобачевского, пересекающая абсолют в точках r, s, а t — проекция на абсолют точки $\psi_1 \cap \psi_2$, то $(s-q)/(q-t) = (t-r)/(r-p)$.*

Доказательство. Гомотетия с центром t и коэффициентом $(q-t)/(t-r)$ переводит ψ_1 в ψ_2, а абсолют — в себя. □

Доказательство предложения 3. Следствие 1 позволяет считать, что Φ оставляет на месте точки 0, 1 и ∞. Обозначим φ ограничение Φ на абсолют; согласно предложению 2 нам достаточно доказать, что $\varphi(t) \equiv t$.

Пусть $m = x+iy \in H$. Прямая $(m0)$ пересекает абсолют в точках 0 и a, прямая $(m1)$ — в точках 1 и b, прямая $(m\infty)$ — вертикальный луч с абсциссой x. По лемме 3 $b = (1-a)x/(1-x)$. Образ $\Phi((m0))$ — прямая, соединяющая 0 и $\varphi(a)$, образ $\Phi((m1))$ — прямая, соединяющая 1 и $\varphi(b)$, образ $(m\infty)$ — вертикальный луч с абсциссой $\varphi(x)$. По лемме 3 $\varphi(b) = (1-\varphi(a))\varphi(x)/(1-\varphi(x))$. Таким образом, для всех x, a имеет место соотношение $\varphi(\frac{(1-a)x}{1-x}) = \frac{(1-\varphi(a))\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$.

Положим вначале $x = 1/2$. Тогда $\forall a\, \varphi(1-a) = \lambda(1-\varphi(a))$, где $\lambda = \varphi(1/2)/(1-\varphi(1/2))$. Применяя это соотношение дважды, получим $\forall a\, \varphi(a) = \varphi(1-(1-a)) = \lambda(1-\varphi(1-a)) = \lambda - \lambda^2 + \lambda^2\varphi(a)$, откуда $\lambda = 1$, и $\varphi(1-a) = 1-\varphi(a)$. Теперь основное соотношение можно переписать так: $\varphi(\frac{(1-a)x}{1-x}) = \frac{\varphi(1-a)\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$.

Возьмем теперь $a = 0$. Поскольку $\varphi(1) = 1$, получается соотношение $\varphi(\frac{x}{1-x}) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$. Теперь тождество принимает вид: $\varphi((1-a)\cdot\frac{x}{1-x}) = \varphi(1-a)\cdot\varphi(\frac{x}{1-x})$. Полагая $1-a = y$, $x/(1-x) = z$, получаем, что $\varphi(yz) = \varphi(y)\varphi(z)$.

Пусть $\varphi(2) = u$. Тогда $\varphi(2^\alpha) = \varphi(2)^\alpha = u^\alpha$ для всякого $\alpha \in \mathbb{N}$. Равенство $1 = \varphi(2^\alpha \cdot 2^{-\alpha}) = u^\alpha \cdot \varphi(2^{-\alpha})$ показывает, что $\varphi(2^\alpha) = u^\alpha$ также и для отрицательных α. Теперь $u^p = \varphi((2^{p/q})^q) = \varphi(2^{p/q})^q$, откуда вытекает равенство $\varphi(2^\alpha) = u^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{Q}$. В силу непрерывности φ получим, что $\varphi(2^\alpha) = u^\alpha$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Тем самым $\varphi(t) = \varphi(2^{\log_2 t}) = u^{\log_2 t} = 2^{\log_2 t \cdot \log_2 u} = t^{\log_2 u} \stackrel{\text{def}}{=} t^r$. Из равенства $\varphi(\frac{x}{1-x}) = \frac{\varphi(x)}{1-\varphi(x)}$ получаем $r = 1$. □

Теорема 1. *Любое аффинное преобразование плоскости Лобачевского (в модели Пуанкаре в полуплоскости) это преобразование стандартного вида.*

Доказательство. Пусть $f : H \to H$ — аффинное преобразование. Продолжим его на абсолют (это возможно, согласно предложению 2), и пусть $f(0) = p$, $f(1) = q$, $f(\infty) = r$. Пусть $g : \mathbb{R}P^1 \to \mathbb{R}P^1$ — дробно-линейное преобразование, для которого $g(p) = 0$, $g(q) = 1$, $g(r) = \infty$. Согласно следствию 1, g является ограничением на абсолют аффинного преобразования $h : H \to H$ стандартного вида. Преобразование $f \circ h$ — аффинное и оставляет на месте точки $0, 1, \infty$ абсолюта. Согласно предложению 3, $f \circ g = \mathrm{id}$, откуда $f = g^{-1}$ — преобразование стандартного вида. $\square$