ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Метрика на плоскости Лобачевского.

Флагом на плоскости Лобачевского Π назовем тройку (a, p, S), состоящую из точки $a \in \Pi$, луча (полупрямой) p с началом a и полуплоскости $S \subset \Pi$, на границе которой лежит луч p.

Предложение 1. *Для любых двух флагов (a_1, p_1, S_1), (a_2, p_2, S_2) существует ровно одно аффинное преобразование, переводящее один в другой.*

Доказательство. Достаточно доказать это для модели Пуанкаре в верхней полуплоскости $H = \Pi$.

Обозначим ℓ_1, ℓ_2 прямые, содержащие лучи p_1, p_2, и пусть ℓ_i пересекает абсолют в точках a_i, b_i $(i = 1, 2)$. Согласно предложению 1 лекции 6, существует аффинное преобразование $f : H \to H$ такое, что $f(a_1) = a_2$, $f(b_1) = b_2$. Тогда $f(\ell_1) = \ell_2$, то есть аффинным преобразованием можно перевести любую прямую в любую прямую.

Пусть теперь $\ell \subset H$ — прямая, $a_1, a_2 \in \ell$. Без ограничения общности можно считать (почему?), что ℓ — положительная мнимая полуось, $a_1 = k_1 i$, $a_2 = k_2 i$. Аффинное преобразование $f(z) = k_2/k_1 \cdot z$ переводит a_1 в a_2 и сохраняет ℓ. Следовательно, для любых двух точек $a_1 \in \ell_1$, $a_2 \in \ell_2$ существует аффинное преобразование, переводящее a_1 в a_2 и ℓ_1 в ℓ_2.

Пусть ℓ — положительная мнимая полуось, $a = i$. Преобразование $z \mapsto 1/\overline{z}$ переводит ℓ в себя и меняет местами два луча с началом в точке a. Преобразование $z \mapsto -\overline{z}$ сохраняет ℓ поточечно (в частности, сохраняет точку a и лучи с началом в ней) и меняет местами две полуплоскости, ограниченные прямой ℓ. Тем самым доказано существование аффинного преобразования, переводящего произвольный флаг (a_1, p_1, S_1) в произвольный флаг (a_2, p_2, S_2).

Для доказательства единственности достаточно рассмотреть ситуацию, когда $a_1 = a_2 = i$, $p_1 = p_2$ — луч с началом в i вертикально вверх, и $S_1 = S_2$ — правая полуплоскость (множество чисел с положительной вещественной и мнимой частью). Тогда ограничение аффинного преобразования на абсолют сохраняет точки 0 и ∞, и поэтому имеет вид $f(t) = ct$, $c \in \mathbb{R}$. Значит, либо $\Phi(z) = cz$, $c > 0$, либо $\Phi(z) = c\overline{z}$, $c < 0$. Но из всех таких преобразований точку i и правую полуплоскость сохраняет только тождественное преобразование. $\square$

Заметим, что в евклидовом случае соответствующее множество аффинных преобразований бесконечно — группа аффинных преобразований плоскости Лобачевского "меньше", чем соответствующая группа евклидовой плоскости.

Вторая группа аксиом — свойства расстояния:

A3. $\varrho(a, b) \geq 0$, причем $\varrho(a, b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
A4. $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$.
A5. $\varrho(a, c) \leq \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$.

Вообще, если X — произвольное множество, а $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, удовлетворяющая аксиомам A3–A5, то X называют метрическим пространством, а ϱ — расстоянием.

Следующие аксиомы связывает понятие прямой и понятие расстояния:

A6. Если $\varrho(a, c) = \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$, то точки a, b и c лежат на одной прямой.
A7. Если три точки лежат на одной прямой, то существует способ дать им имена a, b и c так, чтобы $\varrho(a, c) = \varrho(a, b) + \varrho(b, c)$

Расстояние ϱ в моделях Пуанкаре и в модели Клейна в круге задают по одинаковой схеме; в модели Клейна в гиперболоиде та же схема работает с небольшими изменениями. А именно, выберем гладкую функцию $\varphi : \Pi \to \mathbb{R}_+$ (свою в каждом примере). Пусть теперь $\gamma : [0, 1] \to \Pi$ — гладкая кривая, соединяющая точки $\gamma(0) = a$ и $\gamma(1) = b$. Вектор $\gamma'(t) \stackrel{\text{def}}{=} (u(t), v(t))$ естественно называть вектором скорости кривой в точке $\gamma(t)$. Длиной вектора скорости назовем величину $\|\gamma'(t)\|_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)| = \varphi(\gamma(t))\sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ — заметим, что она зависит как от самого вектора скорости $\gamma'(t)$, так и от "точки приложения" $\gamma(t)$. Длиной кривой γ назовем величину $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|_\varphi \, dt$. Множество длин всевозможных кривых, соединяющих a и b (т.е. таких, что $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$), обозначим $R_\varphi(a, b)$; расстояние между точками a и b определим формулой $\varrho_\varphi(a, b) = \inf R_\varphi(a, b)$.

Замечание. На самом деле эта точная нижняя грань достигается, то есть расстояние можно определить как длину кратчайшей кривой, соединяющей a и b; но нам этот факт не понадобится, и доказывать его мы не будем.

Предложение 2. *Расстояние ϱ_φ (с любой функцией φ) удовлетворяет аксиомам A3–A5.*

Доказательство. A4: если кривая $\gamma(t)$ соединяет a и b, то кривая $\tilde{\gamma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(1-t)$ соединяет b и a. Очевидно, $\|\tilde{\gamma}'(t)\|_\varphi = \|\gamma'(1-t)\|_\varphi$, откуда вытекает, что $\ell_\varphi(\tilde{\gamma}) = \ell_\varphi(\gamma)$. Тем самым $R_\varphi(a,b) = R_\varphi(b,a)$, откуда $\varrho_\varphi(a,b) = \varrho_\varphi(b,a)$.

A5: соединим точки a и c кривой γ_1, а точки c и b кривой γ_2. Объединение этих кривых — назовем его γ — соединяет a и b. Кривая γ не является гладкой; для произвольного $\varepsilon > 0$ ее, однако, можно сгладить вблизи точки c так, чтобы получилась гладкая кривая $\tilde{\gamma}$, обладающая свойством $\ell_\varphi(\tilde{\gamma}) \le \ell_\varphi(\gamma_1) + \ell_\varphi(\gamma_2) + \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in R_\varphi(a,c), y \in R_\varphi(c,b)\, \exists z \in R_\varphi(a,b) : z \le x + y + \varepsilon$. Отсюда немедленно вытекает, что $\varrho_\varphi(a,b) = \inf R_\varphi(a,b) \le \inf R_\varphi(a,c) + \inf R_\varphi(b,c) = \varrho_\varphi(a,c) + \varrho_\varphi(b,c)$.

A3: пусть $a \ne b$. Рассмотрим какой-нибудь прямоугольник $P \subset \Pi$, содержащий a и b внутри себя. Прямоугольник P компактен (это легко вытекает из доказанной в курсе анализа компактности отрезка), функция $\varphi(x,y)$ из определения расстояния непрерывна. Следовательно, φ достигает в P своего наименьшего значения $m > 0$; так что $\varphi(p) \ge m > 0$ для всех $p \in P$.

Пусть сначала кривая γ, соединяющая a и b, целиком содержится в P. Для любых двух векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ имеет место неравенство $|v_1 + v_2| \le |v_1| + |v_2|$, откуда вытекает, что модуль интеграла от произвольной вектор-функции не превосходит интеграла от ее модуля (интеграл от вектор-функции является вектором и вычисляется покомпонентно). Тогда имеем $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt \ge m \int_0^1 |\gamma'(t)|\, dt \ge m \left| \int_0^1 \gamma'(t)\, dt \right| = m\,|b-a|$.

Пусть теперь кривая γ пересекает границу ∂P прямоугольника. Множество $\partial P \subset P$ замкнуто и, следовательно, компактно (поскольку P компактно). Функция $r : \partial P \to \mathbb{R}$, заданная равенством $r(x) \stackrel{\text{def}}{=} |x - a|$, непрерывна и, следовательно, достигает на ∂P своего наименьшего значения $r_* > 0$. Множество $T = \gamma^{-1}(\partial P) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in \partial P\}$ также замкнуто (поскольку γ непрерывна). Следовательно, T содержит наименьшее число $t_* > 0$ ($0 \notin T$, поскольку $a = \gamma(0)$ лежит внутри P). Тогда $\ell_\varphi(\gamma) \ge \int_0^{t_*} \varphi(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt \ge m \int_0^{t_*} |\gamma'(t)|\, dt \ge m \left| \int_0^{t_*} \gamma'(t)\, dt \right| = m\,|a - \gamma(t_*)| \ge m r_*$.

Из двух полученных оценок вытекает, что $\varrho_\varphi(a,b) = \inf R_\varphi(a,b) \ge \min(m\,|b-a|\,, m r_*) > 0$. □

Справедливость аксиом A6 и A7 зависит от выбора функции φ.

Теорема 1. *Существует и единственна с точностью до пропорциональности функция φ такая, что $\ell_\varphi(\gamma) = \ell_\varphi(f(\gamma))$ для всякой кривой ℓ и всякого аффинного преобразования $f : \Pi \to \Pi$. Расстояние ϱ_φ удовлетворяет аксиомам A6 и A7.*

Лемма 1. *Пусть f — аффинное преобразование плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре в полуплоскости, и $f(z) = z$. Тогда $|f(z+\delta) - z| = |\delta| + o(|\delta|)$ при $\delta \to 0$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$ — второй случай разбирается аналогично.

$f(z+\delta) - z = f(z+\delta) - f(z) = f'(z)\delta + o(\delta)$ при $\delta \to 0$. Таким образом, $|f(z+\delta) - z| = |f'(z)|\,|\delta| + o(|\delta|)$, и нужно доказать, что $|f'(z)| = 1$. Имеем $f'(z) = (ad-bc)/(cz+d)^2$. Равенство $z = f(z)$ означает $z = (az+b)/(cz+d)$; поскольку $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, имеем $\bar{z} = (a\bar{z}+b)/(c\bar{z}+d)$. Вычитая эти равенства друг из друга, получим $z - \bar{z} = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d))}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} = \frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = |f'(z)|\,(z - \bar{z})$, откуда вытекает требуемое. □

Доказательство теоремы 1 — см. следующую лекцию.