ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Инвариантность метрики при аффинных преобразованиях.

Доказательство теоремы 1 лекции 7. Положим $\varphi(i) = c > 0$. Теперь для каждого $z \in H$ (точки верхней полуплоскости) рассмотрим дробно-линейное преобразование $f : H \to H$ такое, что $f(z) = i$. Положим по определению $\varphi(z) = c\,|f'(z)|$. Определение, очевидно, корректно: если f_1, f_2 — два таких преобразования, то преобразование $g = f_2^{-1} \circ f_1$ сохраняет точку z. Из леммы 1 лекции 7 вытекает, что $|g'(z)| = 1$; по формуле для производной обратной функции $g'(z) = f_1'(z)/f_2'(z)$. Отсюда $|f_1'(z)| = |f_2'(z)|$.

Пусть теперь $\gamma : [0,1] \to H$ — кривая, $F : H \to H$ — дробно-линейное преобразование, и $\lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(\gamma(t))$. Если $f(\lambda(t)) = i$, то $(f \circ F)(\gamma(t)) = i$. По правилу дифференцирования сложной функции $\lambda'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t)$. Теперь $\varphi(\lambda(t))\,|\lambda'(t)| = c\,|f'(\lambda(t))\lambda'(t)| = c\,|f'(\lambda(t))F'(\gamma(t))\gamma'(t)| = c\,|(f \circ F)'(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)| = \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|$. Отсюда вытекает, что $\ell_\varphi(\lambda) = \int_0^1 \varphi(\lambda(t))\,|\lambda'(t)|\,dt = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt = \ell_\varphi(\gamma)$ — дробно-линейные преобразования сохраняют длины кривых.

Пусть теперь $F : H \to H$ — параллельный перенос на вектор, параллельный оси абсцисс. Он является аффинным преобразованием и, следовательно, сохраняет метрику Лобачевского. С другой стороны, евклидову длину он также сохраняет. Отсюда вытекает, что функция $\varphi : H \to \mathbb{R}$ не зависит от абсциссы точки: $\varphi = \varphi(y)$. Отсюда вытекает, что длины кривых не меняются также и при преобразовании $c(z) \stackrel{\text{def}}{=} -\bar{z}$. Поскольку каждое аффинное преобразование H — либо дробно-линейное, либо композиция дробно-линейного и c, длина кривой не меняется при любых аффинных преобразованиях.

Докажем теперь, что кратчайшей кривой, соединяющей две точки $a, b \in H$, является отрезок прямой Лобачевского (ab). Аффинным преобразованием можно добиться того, чтобы a и b лежали на одном вертикальном луче: $a = (p, y_1)$, $b = (p, y_2)$. Поскольку метрика аффинно инвариантна, достаточно доказать утверждение для таких точек. Соединим a и b произвольной кривой $\gamma(t) = (\gamma_x(t), \gamma_y(t))$.

Лемма 1. *Если $\gamma_x \neq const.$ (то есть кривая γ не идет по вертикальному лучу), то существует кривая γ_0, соединяющая точки a и b и такая, что $\ell_\varphi(\gamma_0) < \ell_\varphi(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть $\gamma_0(t) = (p, \gamma_y(t))$ — вертикальная кривая, соединяющая a и b. Тогда $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\sqrt{(\gamma_x'(t))^2 + (\gamma_y'(t))^2}\,dt = \int_0^1 \varphi(\gamma_0(t))\sqrt{(\gamma_x'(t))^2 + (\gamma_y'(t))^2}\,dt$ (поскольку φ не зависит от абсциссы точки) $> \int_0^1 \varphi(\gamma_0(t))\,|\gamma_y'(t)|\,dt = \ell_\varphi(\gamma_0)$. □

Пусть, для опрелделенности, $y_2 > y_1$, т.е. точка b лежит выше точки a.

Лемма 2. *Если кривая $\gamma(t) = (p, \gamma_y(t))$ идет по вертикальному лучу, но не монотонна (функция γ_y не является возрастающей), то существует кривая γ_0, соединяющая точки a и b и такая, что $\ell_\varphi(\gamma_0) < \ell_\varphi(\gamma)$.*

Доказательство. Если γ_y не монотонна, то существуют числа $t_1 < t_2$ такие, что $\gamma_y(t_1) = \gamma_y(t_2)$. Пусть $\int_{t_1}^{t_2} \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt \stackrel{\text{def}}{=} a$; очевидно, $a > 0$. Рассмотрим кривую $\gamma_0(t) = (p, \gamma_{0,y}(t))$ такую, что $\gamma_{0,y}(t) = \gamma_y(t)$ при $0 \le t \le t_1 - \varepsilon$ и $t_2 + \varepsilon \le t \le 1$, $\gamma_{0,y}(t) = \gamma_y(t_1) = \gamma_y(t_2)$ при $t_1 \le t \le t_2$, а на интервалах $(t_1 - \varepsilon, t_1)$ и $(t_2, t_2 + \varepsilon)$ функция $\gamma_{0,y}$ как-то сглажена (чтобы существовала производная). Ясно, что число ε и сглаживание можно выбрать так, чтобы $\int_{t_1-\varepsilon}^{t_1} \varphi(\gamma_0(t))\,|\gamma_{0,y}'(t)|\,dt + \int_{t_2}^{t_2+\varepsilon} \varphi(\gamma_0(t))\,|\gamma_{0,y}'(t)|\,dt < a$. Тогда, очевидно, $\ell_\varphi(\gamma_0) < \ell_\varphi(\gamma)$. □

Пусть теперь γ идет по вертикальному лучу: $\gamma(t) = (p, \gamma_y(t))$ и γ_y монотонно возрастает, так что $\gamma_y'(t) \ge 0$. Тогда $\ell_\varphi(\gamma) = \int_0^1 \varphi(\gamma_y(t))\gamma_y'(t)\,dt = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy$ (замена переменной $y = \gamma_y(t)$) — иными словами, у всех таких кривых одинаковая длина. Следовательно, $\varrho_\varphi(a,b) = \inf_{\gamma(0)=a, \gamma(1)=b} \ell_\varphi(\gamma) = \int_{y_1}^{y_2} \varphi(y)\,dy$, причем нижняя грань достигается на любой кривой, монотонно идущей от a к b вдоль вертикального луча. Из аффинной инвариентности длины вытекает теперь, что кратчайшая кривая между любыми точками — соединяющий их отрезок прямой Лобачевского, проходимый монотонно.

Аксиома A6 теперь очевидна: длина кривой, составленной из отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$, равна длине кратчайшей кривой, соединяющей a и c — из леммы 1 вытекает, что эти два отрезка лежат на одной прямой. Аксиома A7: $\varrho(a,c) = \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$, если точка b лежит на отрезке $[a,c]$. □

В определение плоскости Лобачевского входит еще одно требование, называемое *аксиомой подвижности*:

A8. Для любых двух флагов на плоскости Лобачевского существует ровно одно движение, переводящее один флаг в другой.

Дополнение (к теореме 1 лекции 7). *Метрика ϱ_φ на плоскости Лобачевского удовлетворяет аксиоме A8*

Доказательство. Аффинные преобразования сохраняют расстояние между точками. С другой стороны, из аксиом A6 и A7 вытекает, что преобразование, сохраняющее расстояние, аффинно. Но для аффинных преобразований аксиома уже доказана — предложение 1 лекции 7. $\square$

Вычислим функцию φ. Преобразование $f(z) = z/k$, $k > 0$, переводит ki в i. Теперь $\varphi(ki) = c\,|f'(ki)| = c/k$. Поскольку φ зависит только от ординаты точки, имеем $\varphi(x, y) = c/y$.

Вычислим теперь расстояние ϱ между точками явно.

Предложение 1. *Пусть $z, w \in H$ — точки верхней полуплоскости. Тогда*

1) *Расстояние $\varrho(z, w)$ между ними равно $c \ln[p, q, w, z]$, где p, q — точки пересечения прямой (zw) с абсолютом (p — со стороны z, q — со стороны w).*
2) *Расстояние $\varrho(z, w)$ равно $c \operatorname{Arch}(1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w})$, где $\operatorname{Arch}(t) \stackrel{def}{=} \ln(t + \sqrt{t^2 - 1})$ — функция, обратная гиперболическому косинусу.*

Доказательство. Пусть сначала $z = iy_1$, $w = iy_2$ и, для определенности, $y_2 > y_1$. Тогда $\varrho(z, w) = \int_{y_1}^{y_2} c\frac{dy}{y} = c \ln \frac{y_2}{y_1}$. Заметим теперь, что прямая (zw) пересекает абсолют в точках 0 и ∞, и $y_2/y_1 = [0, \infty, w, z]$. Поскольку двойное отношение сохраняется при аффинных преобразованиях, получается формула пункта 1.

Для доказательства пункта 2 заметим, что величина $\frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$ инвариантна при аффинных преобразованиях $f_{1,b}(z) = z + b$ ($b \in \mathbb{R}$), $f_{2,a}(z) = az$ ($a > 0$), $f_3(z) = -\bar{z}$ и $f_4(z) = 1/\bar{z}$. Для f_1, f_2 и f_3 это очевидно; для f_4 имеем $\frac{|1/\bar{z} - 1/\bar{w}|^2}{2 \operatorname{Im}(1/\bar{z}) \operatorname{Im}(1/\bar{w})} = \frac{|z-w|^2 \cdot |z|^2 |w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w \cdot |z|^2 |w|^2} = \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$. Докажем теперь, что всякое аффинное преобразование представляется в виде композиции преобразований f_1–f_4. Действительно, если $f = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc > 0$, то можно считать без ограничения общности, что $c > 0$ (случай $c = 0$ — упражнение). Тогда $f = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c} f_4(f_3(cz + d)) = f_{1,a/c} \circ f_{2,(ad-bc)/c} \circ f_4 \circ f_3 \circ f_{1,d} \circ f_{2,c}(z)$. Случай $f = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ разбирается аналогично. Следовательно, величина $\operatorname{Arch}(1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w})$ инвариантна при всех аффинных преобразованиях. С другой стороны, если $z = iy_1$, $w = iy_2$ — точки мнимой оси, и $y_2 > y_1$, то $\operatorname{Arch}(1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}) = \operatorname{Arch} \frac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1 y_2} = \ln\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2} + \sqrt{\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2}\right)^2 - 1}\right) = \ln\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2y_1y_2} + \frac{y_2^2-y_1^2}{2y_1y_2}\right) = \ln \frac{y_2}{y_1}$. Таким образом, для точек мнимой оси формула пункта 2 дает расстояние Лобачевского. Но аффинным преобразованием можно любые две точки поместить на мнимую ось. $\square$