ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Формулы для метрики в различных моделях плоскости Лобачевского.

Непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ называется кривой. Кривая называется гладкой в точке $t \in [0,1]$, если в некоторой окрестности $U \subset [0,1]$ точки t отображение имеет непрерывную производную, не обращающуюся в нуль.

Пусть γ_1, γ_2 — кривые на плоскости, пересекающиеся в точке $z = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$ и гладкие в точках t_1, t_2. Углом между кривыми называется угол (обычный) между их касательными в точке z, то есть угол между векторами (ненулевыми!) $\gamma_1'(t)$ и $\gamma_2'(t)$.

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — отображение, которое в некоторой окрестности U точки z имеет непрерывную производную, не обращающуюся в нуль. Тогда кривые $\Gamma_1 \stackrel{def}{=} f \circ \gamma_1$ и $\Gamma_2 \stackrel{def}{=} f \circ \gamma_2$ — гладкие в точках t_1, t_2, и угол между ними равен углу между кривыми γ_1, γ_2.*

Доказательство. Имеем $\Gamma_1'(t_1) = f'(\gamma_1(t_1))\gamma_1'(t_1) = f(z)\gamma_1'(t_1)$, и, аналогично, $\Gamma_2'(t_2) = f'(z)\gamma_2'(t_2)$. Тем самым комплексные числа $\Gamma_1'(t_1)$, $\Gamma_2'(t_2)$ получаются из комплексных чисел $\gamma_1'(t_1)$, $\gamma_2'(t_2)$ умножением на одно и то же комплексное число $f'(z) \neq 0$. Умножение на ненулевое комплексное число это композиция поворота и растяжения, то есть преобразование, сохраняющее углы между векторами. $\square$

Следствие 1. *Аффинные преобразования модели Пуанкаре в полуплоскости сохраняют углы между кривыми (при условии, что не переводят точку пересечения в бесконечность).*

Доказательство. Достаточно разобрать случай, когда аффинное преобразование f — дробно-линейное. Если $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}$, то $f'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$. $\square$

Рассмотрим теперь метрику в других моделях плоскости Лобачевского. По определению, $\varrho_X(z,w) = \varrho_H(f_{XH}(z), f_{XH}(w))$, где X — какая-нибудь модель, а $f_{XH} : X \to H$ — эквивалентность X и модели Пуанкаре в полуплоскости. Эквивалентность $f_{H\Omega}$ моделей Пуанкаре в полуплоскости и в круге — дробно-линейное преобразование. Оно сохраняет двойное отношение, поэтому $\varrho_\Omega(z,w) = c\ln[p,q,w,z]$, где p,q — точки пересечения прямой zw с абсолютом (границей круга). Пусть теперь $z, w \in \Omega$ — близкие точки, $w - z = v$. Тогда $\varrho_\Omega(z,w) = \varrho_H(f_{\Omega H}(z), f_{\Omega H}(z+v)) = \varphi(f_{\Omega H}(z))\,|f_{\Omega H}'(z)|\ |v| + o(|v|)$, $v \to 0$. Поскольку $f_{\Omega H}(z) = i\frac{1+z}{1-z}$, имеем $\varphi(f_{\Omega H}(z)) = \frac{c}{\operatorname{Im}(i(1+z)/(1-z))} = \frac{2c}{\frac{1+z}{1-z} + \frac{1+\bar z}{1-\bar z}} = \frac{c|1-z|^2}{1-|z|^2}$. Также: $f'(z) = \frac{2i}{(1-z)^2}$, откуда $\varrho(z,w) = \frac{2c}{1-|z|^2}|v| + o(v)$. Тем самым метрику в модели Пуанкаре в круге можно задать по той же схеме, что и в модели в полуплоскости, при этом нужно использовать функцию $\varphi(z) = \frac{2c}{1-|z|^2}$.

Обозначим $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ билинейную форму $B((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$, и пусть $Q(v) \stackrel{\text{def}}{=} B(v,v)$. Напомним, что имеется модель плоскости Лобачевского в половине гиперболоида $L = \{(x,y,z) \mid Q(x,y,z) = -1, z > 0\}$. Роль абсолюта в этой модели играет конус $L_0 = \{(x,y,z) \mid Q(x,y,z) = 0\}$.

Предложение 1. *Пусть ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 и m_1, m_2, m_3 — две тройки попарно различных прямых в конусе L_0. Тогда существует линейное преобразование $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $A\ell_i = m_i$ $(i = 1,2,3)$ и $B(Au, Av) = B(u,v)$ для всех $u, v \in \mathbb{R}^3$.*

Доказательство — упражнение (см. материалы семинара 6).

Следствие 2. *Пусть p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 — две тройки попарно различных точек на границе ∂D круга D. Тогда существует проективное преобразование $C : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$, переводящее круг D в себя и такое, что $C(p_i) = q_i$, $i = 1,2,3$.*

Доказательство. Реализуем круг D как множество $\{(x,y,1) \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3$ и рассмотрим прямые $\ell_i = \{tp_i \mid t \in \mathbb{R}\}$ и $m_i = \{tq_i \mid t \in \mathbb{R}\}$. Очевидно, $\ell_i, m_i \subset L_0$. Тогда в качестве C можно взять проективизацию $\overline{A}$, где A — преобразование из предложения 1. $\square$

Предложение 2. *Аффинные преобразования модели Клейна в круге D это проективные преобразования $\mathbb{R}P^2$, сохраняющие круг. Аффинные преобразования модели Клейна в гиперболоиде L это ограничение на гиперболоид линейных преобразований $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ таких, что $B(Au, Av) = B(u,v)$ и $AL = L$.*

Доказательство. Очевидно, все проективные преобразования $\mathbb{R}P^2$, сохраняющие D, переводят хорды в хорды и, следовательно, являются аффинными (в геометрии Лобачевского). Пусть $f : D \to D$ — произвольное аффинное преобразование, и q_1, q_2, q_3 — попарно различные точки абсолюта; пусть $p_i = f(q_i)$, $i = 1, 2, 3$. Согласно следствию 2, существует проективное преобразование $g : D \to D$ такое, что $g(p_i) = q_i$. Тогда преобразование $g \circ f$ является аффинным и сохраняет точки q_1, q_2, q_3. Согласно предложению 3 лекции 6, $g \circ f = \mathrm{Id}$, то есть $f = g^{-1}$ — проективное преобразование, сохраняющее D.

Пусть $C : L \to L$ — аффинное преобразование, а $f_{LD} : L \to D$ — эквивалентность моделей, то есть проектирование гиперболоида на круг из начала координат. Тогда $C_0 = f_{LD} \circ C \circ f_{LD}^{-1}$ — проективное преобразование $D \to D$, то есть $C_0 = \overline{A}$ для некоторого линейного преобразования $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определенного однозначно с точностью до умножения на константу. Функции $Q(x, y, z)$ и $Q(A(x, y, z))$ — однородные квадратные многочлены от x, y, z. Поскольку C_0 переводит границу круга в границу, преобразование A переводит конус L_0 в себя. Следовательно, если $Q(x, y, z) = 0$, то и $Q(A(x, y, z)) = 0$ — многочлены имеют общие нули. Отсюда вытекает (почему?), что они пропорциональны: $Q(A(x, y, z)) = tQ(x, y, z)$ для некоторой константы t. Умножая A на $1/\sqrt{|t|}$, можно добиться равенства $Q(A(x, y, z)) = Q(x, y, z)$; при этом проективизация не изменится — по-прежнему $C_0 = \overline{A}$. Из равенства $B(u, v) = (Q(u + v) - Q(u) - Q(v))/2$ (проверьте!) вытекает теперь, что $B(Au, Av) = B(u, v)$. Кроме того, поскольку $L = \{(x, y, z) \mid Q(x, y, z) = -1, z > 0\}$, имеем либо $AL = L$, либо $AL = -L$. Во втором случае заменим A на $-A$ — по-прежнему $C_0 = \overline{A}$ и $B(Au, Av) = B(u, v)$ для всех $u, v \in \mathbb{R}^3$. □

Следствие 3. *Существует проективное преобразование $\mathbb{R}P^2$, сохраняющее круг D и переводящее произвольную точку $w \in D$ в центр круга.*

Доказательство. Вытекает из предложения 2 и предложения 1 лекции 7. □

Отображение $f_{\Omega D}$ (эквивалентность модели Пуанкаре и модели Клейна в круге) переводит точку $z \in \Omega$ в середину A хорды pq, соединяющей концы дуги, проведенной через точку z перпендикулярно к радиусу $0z$ и к границе круга Ω (0 — центр круга Ω; радиус круга равен 1). Пусть $|z| \stackrel{\text{def}}{=} y$. Окружность ω, содержащая дугу pq, содержит также точку $B = z/|z|^2$, поэтому ее радиус равен $r = \frac{1}{2}(\frac{1}{y} - y)$. Обозначим x длину отрезка $0A$, а S — центр окружности ω. Треугольник $0pS$ — прямоугольный, с катетами 1 и r, а pA — его высота. Отсюда $\operatorname{tg} \widehat{p0S} = r$, а $x = \cos \widehat{p0S} = 1/\sqrt{1 + r^2} = \frac{2y}{1+y^2}$.

Пусть u, v — точки пересечения прямой $0z$ (она же прямая $0A$) с границей круга Ω. Тогда $[u, v, z, 0] = \frac{1-y}{1+y}$, а $[u, v, A, 0] = \frac{1-x}{1+x} = \left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2$. Отсюда следует, что $\varrho_D(0, A) = \varrho_\Omega(0, z) = \frac{c}{2} \ln[u, v, 0, A]$. Согласно предложению 2 и следствию 3, аффинным преобразованием можно перевести произвольную точку $a \in D$ в центр круга, а двойные отношения при аффинных преобразованиях сохраняются. Следовательно, $\varrho_D(a, b) = \frac{c}{2} \ln[p, q, b, a]$, где p, q — точки пересечения хорды (прямой Лобачевского) ab и границы круга D (абсолюта).

Пусть теперь $a, b \in L$ — точки на гиперболоиде. Пусть сначала $a = (0, 0, 1)$, а b лежит в плоскости $y = 0$, то есть $b = (x/\sqrt{1 - x^2}, 0, 1/\sqrt{1 - x^2})$, $-1 < x < 1$. Тогда $f_{LD}(a) = 0$, $f_{LD}(b) = x$ (лежит на оси x), так что $\varrho_L(a, b) = \frac{c}{2} |\ln[-1, 1, x, 0]| = \frac{c}{2} \left|\ln \frac{1+x}{1-x}\right|$. В то же время $B(a, b) = -1/\sqrt{1 - x^2}$, откуда вытекает, что $\operatorname{ch}(\varrho_L(a, b)/c) = -B(a, b)$, где $\operatorname{ch} t = (e^t + e^{-t})/2$ — гиперболический косинус. Аффинные преобразования сохраняют, согласно предложению 2, форму B, а также сохраняют расстояние. Такими преобразованиями, согласно предложению 2 и следствию 3, можно любую пару точек (a, b) перевести в точки, рассмотренные выше. Следовательно, формула $\varrho_L(a, b) = c \operatorname{Arch}(-B(a, b))$ (где Arch — функция, обратная гиперболическому косинусу), верна для всех $a, b \in L$.

Пусть точки $a, b \in L$ близки: $a = (x, y, z)$, $b = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Тогда $\operatorname{ch} \varrho_L(a, b) = 1 + (-x\Delta x - y\Delta y + z\Delta z)$. Поскольку $\operatorname{ch} t = 1 + t^2 + o(t^2)$ при $t \to 0$, получаем, что $\varrho_L(a, b) = \sqrt{-x\Delta x - y\Delta y + z\Delta z} + o(|a - b|)$, $b \to a$. Следовательно, расстояние в модели Клейна в гиперболоиде можно определить по той же схеме, что и в модели Пуанкаре, только длину вектора $\gamma'(t) = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ скорости кривой γ такой, что $\gamma(t) = (x, y, z)$, нужно определить не как $\varphi(x, y)\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ с подходящим φ, а как $\sqrt{-x\Delta x - y\Delta y + z\Delta z}$.