ПРОГРАММА КУРСА

Программа содержит список основных утверждений, которые нужно уметь доказывать. Требуется, разумеется, знать и весь относящийся к делу вспомогательный материал — определения, основные свойства, вспомогательные утверждения и проч. Если вы чувствуете себя в силах, доказывайте варианты утверждений, выделенные мелким наклонным шрифтом.

Литература

- В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров, "Геометрия" — линейная, аффинная и проективная геометрия, геометрия Лобачевского. Наилучшее приближение к "учебнику по курсу".
- А.И. Кострикин, Ю.И. Манин, "Линейная алгебра и геометрия" — линейная, аффинная и проективная геометрия (сложнее и красивее, чем в предыдущей книжке), выпуклая геометрия.
- А.Т. Фоменко, Д.Б. Фукс, "Курс гомотопической топологии" — фундаментальная группа. Теорема о факторе по дискретному действию является частным случаем изложенной в этой книге теории накрытий.

Список утверждений

1) Выпуклая геометрия.
   1.1. Выпуклость шара в $\mathbb{R}^n$ (*по отношению к любому положительно определенному скалярному произведению. Что происходит для произвольного скалярного произведения?*).
   1.2. Пример выпуклого четырехмерного многогранника с произвольным числом вершин, попарно соединенных ребрами. (*Обобщение: пример выпуклого многогранника с произвольным числом вершин, любые $k+1$ из которых лежат в одной k-мерной грани.*)
2) Аффинная геометрия.
   2.1. Группа обратимых линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ есть гомоморфный образ группы обратимых аффинных преобразований; ядро гомоморфизма — множество параллельных переносов. (*Непрерывность аффинного преобразования не предполагать. Группа аффинных преобразований не изоморфна прямому произведению группы линейных преобразований и группы параллельных переносов.*)
   2.2. Преобразование аффинно тогда и только тогда, когда переводит всякую прямую в прямую.
   2.3. Группа обратимых аффинных преобразований действует транзитивно и с тривиальным стабилизатором на наборах из $n+1$ точки общего положения.
   2.4. Группа линейных преобразований, сохраняющих заданную гиперплоскость, не проходящую через начало координат, изоморфна группе аффинных преобразований этой гиперплоскости. (*Не предполагайте заранее, что гиперплоскость это $x_0 = 1$.*)
3) Проективная геометрия.
   3.1. Гомеоморфизмы $\mathbb{R}P^1 \sim S^1$ и $\mathbb{C}P^1 \sim S^2$.
   3.2. Проективное пространство гомеоморфно сфере с отождествленными противоположными точками и шару с отождествленными противоположными точками границы. Окрестность $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$ гомеоморфна листу Мебиуса.
   3.3. Группа проективных преобразований $\mathbb{R}P^n$ есть гомоморфный образ группы обратимых линейных преобразований $\mathbb{R}^{n+1}$; ядро гомоморфизма — множество растяжений.
   3.4. Множество проективных преобразований, сохраняющих заданную гиперплоскость, изоморфно множеству аффинных преобразований дополнения к этой гиперплоскости. (*Не предполагайте заранее, что гиперплоскость это $x_0 = 0$. Как определить структуру аффинного пространства на дополнении к произвольной гиперплоскости?*)
   3.5. Обратимое преобразование $\mathbb{R}P^1$ и $\mathbb{C}P^1$ проективно тогда и только тогда, когда оно сохраняет двойное отношение. Действие перестановок точек на двойное отношение.
   3.6. Обратимое преобразование $\mathbb{C}P^1$ проективно тогда и только тогда, когда оно переводит окружности и прямые в окружности и прямые и сохраняет ориентацию.
   3.7. Группа проективных преобразований действует транзитивно и с тривиальным стабилизатором на наборах из $n+2$ точек общего положения.
   3.8. Теоремы Дезарга, Паппа, Паскаля и Брианшона.
   3.9. Прямая, проходящая через две точки, двойственна точке пересечения прямых, двойственных этим точкам. Теоремы, двойственные теоремам Дезарга, Паппа, Паскаля и Брианшона.
4) Геометрия Лобачевского.
   4.1. Эквивалентность моделей Пуанкаре в полуплоскости, Пуанкаре в круге, Клейна в круге и Клейна на гиперболоиде.

4.2. Аффинное преобразование плоскости Лобачевского продолжается на абсолют и определяется своим ограничением на абсолют. Аффинное преобразование, оставляющее три точки абсолюта на месте, является тождественным. (*Сформулировать понятие абсолюта "внутренними" средствами геометрии Лобачевского (без обращения к конкретным моделям).*)

4.3. Явное описание аффинных преобразований в моделях Пуанкаре в полуплоскости, Пуанкаре в круге, Клейна в круге и Клейна на гиперболоиде.

4.4. Минимум "взвешенной длины кривой" задает метрику на открытом подмножестве плоскости (независимо от веса φ). (*Обобщить эту теорему так, чтобы она покрывала случай гиперболоида.*)

4.5. Существует ровно одна, с точностью до пропорциональности, метрика на плоскости Лобачевского, сохраняемая любым аффинным преобразованием. Явные формулы для этой метрики (инфинитезимальная и конечная) в моделях в полуплоскости и на гиперболоиде.

4.6. Гладкие преобразования комплексной прямой сохраняют углы между кривыми.

5) Фундаментальная группа.

5.1. Фундаментальная группа является группой.

5.2. Фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

5.3. Фундаментальная группа фактора односвязного пространства по точно дискретному действию группы G изоморфна G.

5.4. S^n при $n > 1$ односвязна.

5.5. Фундаментальная группа букета окружностей.