1. ВЫПУКЛОСТЬ

Задача 1. а) Докажите, что пересечение выпуклых множеств в любом количестве (в т.ч. бесконечном) выпукло. б) Докажите, что выпуклая комбинация точек выпуклого множества лежит в этом множестве. в) Докажите, что выпуклая оболочка со X произвольного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ совпадает с пересечением всех выпуклых множеств $Y \subset \mathbb{R}^n$ таких, что $X \subset Y$.

Задача 2. Докажите, что если точка a принадлежит грани F выпуклого множества X и является выпуклой комбинацией некоторых точек $a_1, \dots, a_k \in X$ с ненулевыми коэффициентами, то обязательно $a_1, \dots, a_k \in F$. (В частности, вершина не может являться нетривиальной выпуклой комбинацией точек множества.)

Задача 3. Докажите, что выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^3$, любые две вершины которого соединены ребром, является тетраэдром.

Указание. Пусть многогранник содержит вершины a_1, a_2, a_3, a_4. Если он не тетраэдр, то один из треугольников — для определенности $a_1 a_2 a_3$ — не является гранью. Тогда существует (почему?) вершина a_5 такая, что отрезок $a_4 a_5$ пересекает плоскость $a_1 a_2 a_3$. Рассмотрите возможное расположение точки пересечения и придите к противоречию с утверждением задачи 2.

Задача 4 (теорема Радона на плоскости). На плоскости даны $m \geq 4$ точек $a_1, \dots, a_m$. Докажите, что их можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Задача 5. Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, причем $m \geq n + 2$. Докажите, что существуют числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m = 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 0$.

Задача 6 (теорема Радона). Пусть $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$, причем $m \geq n + 2$. Докажите, что точки $a_1, \dots, a_m$ можно разбить на две группы, выпуклые оболочки которых пересекаются.

Задача 7 (теорема Хелли). Пусть $M_1, \dots, M_m \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества, $m \geq n + 1$. Известно, что пересечение любых $n + 1$ множества M_i непусто. Докажите, что пересечение всех множеств M_i непусто.

Указание. Используйте задачу 6. Используя вместо нее задачу 4, получим теорему Хелли на плоскости.

Задача 8. Пусть $T_1, \dots, T_m$ — параллельные отрезки на плоскости, $m \geq 3$. Известно, что для любых трех отрезков существует пересекающая их прямая. Докажите, что существует прямая, пересекающая все отрезки.

Задача 9. Докажите, что всякое непустое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}$ есть отрезок, интервал, полуинтервал, луч или вся прямая.

Указание. Всякое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань.

Задача 10. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, и $y \notin X$. а) Докажите, что существует вектор $a \in \mathbb{R}^n$ и число $b \in \mathbb{R}$ такое, что $(a, y) \leq b$ и $(a, x) \geq b$ для всякого $x \in X$. б*) (для знакомых с понятием замкнутого множества) Докажите, что если X замкнуто, то можно добиться неравенств $(a, y) \leq b$ и $(a, x) > b$ для всякого $x \in X$.