2. ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Общие понятия, связанные с группами преобразований

Группа преобразований множества M это множество G обратимых отображений множества M таких, что для любых двух отображений $g, h \in G$ их композиция $gh \in G$, и если $g \in G$, то и обратное отображение $g^{-1} \in G$. В частности, всякая группа преобразований содержит тождественное отображение $\mathrm{id}_M = gg^{-1}$.

Задача 1. Назовем точки $a, b \in M$ эквивалентными (относительно группы преобразований G), если $\exists g \in G : b = g(a)$. а) Докажите, что это — отношение эквивалентности ($a \sim a$, $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, $a \sim b$ и $b \sim c \Rightarrow a \sim c$). б) Докажите, что для любого отношения эквивалентности $\sim$ на (произвольном) множестве M существует разбиение $M = \bigsqcup_\alpha M_\alpha$ множества на непересекающиеся подмножества такое, что $a \sim b \Leftrightarrow \exists \alpha : a, b \in M_\alpha$.

Классы эквивалентности по отношению $\sim$ называются *орбитами* группы преобразований G. Группа преобразований называется *транзитивной*, если она имеет только одну орбиту.

Задача 2. Пусть G — группа преобразований, а $h : M \to M$ — произвольное обратимое преобразование. Докажите, что множество $hGh^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{hxh^{-1} \mid x \in G\}$ является группой преобразований (она называется группой, сопряженной к G посредством h).

Для произвольного подмножества $N \subset M$ и произвольной группы G преобразований множества M назовем нормализатором N множество $\mathrm{Norm}_G(N)$ преобразований $g \in G$ таких, что $g(N) = N$. Нормализатор одноточечного множества $N = \{a\}$ называется стабилизатором точки и обозначается Stab_a.

Задача 3. а) Докажите, что нормализатор произвольного множества — группа преобразований (подгруппа группы G). б) Докажите, что если точки a и b принадлежат одной орбите, то подгруппы Stab_b и Stab_a сопряжены: существует $h \in G$ такое, что $\mathrm{Stab}_b = h\,\mathrm{Stab}_a\,h^{-1}$.

Подгруппа $H \subset G$ группы преобразований называется нормальной, если $gHg^{-1} = H$ для всякого $g \in G$.

Задача 4. Группа преобразований G транзитивна. В каком случае стабилизатор $\mathrm{Stab}_a \subset G$ является нормальной подгруппой?

2. Группа обратимых аффинных преобразований

Пусть M — центрально симметричный шестиугольник, у которого каждая большая диагональ параллельна тем сторонам, которые ее не пересекают. Обозначим G нормализатор M в группе обратимых аффинных преобразований плоскости.

Задача 5. а) Из скольких элементов состоит группа G? б) Опишите орбиты G. в) Докажите, что всякий элемент группы G переводит произвольную диагональ M в диагональ. г) Из пункта 5в следует, что группе G соответствует группа преобразований на множестве диагоналей M. Опишите орбиты этой группы. д) Вопрос, аналогичный 5в и 5г, для множества треугольников с вершинами в вершинах M.

Сокращенно вопросы, подобные 5г, формулируют так: "найдите орбиты действия группы G на диагоналях шестиугольника".

Задача 6. Найдите орбиты действия группы $\mathrm{GL}(n)$ обратимых линейных преобразований $\mathbb{R}^n$ на множестве а) векторов $v \in \mathbb{R}^n$, б) пар векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, в) троек векторов $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$. Достаточно рассмотреть случаи $n = 1, 2$ и 3.

Задача 7. Вычислите количество элементов в нормализаторе а) правильного n-угольника в группе обратимых аффинных преобразований плоскости, б) правильного тетраэдра в группе обратимых аффинных преобразований $\mathbb{R}^3$, в) куба в той же группе, г) правильного симплекса в группе обратимых аффинных преобразований $\mathbb{R}^n$. Правильным симплексом называется $\mathrm{co}(a_1, \dots, a_{n+1})$, где $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ таковы, что $|a_i - a_j|$ одно и то же для всех пар $i \neq j$.

Задача 8* (для знакомых с теорией групп). Опишите нормализаторы в задаче 7 как (абстрактные) группы.

Полным флагом в правильном многограннике M называется последовательность его граней $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$, где грань F_i имеет размерность i и $F_n = M$.

Задача 9. а) Докажите, что каждая из групп преобразований, описанных в задаче 7, действует транзитивно на множестве полных флагов соответствующего многогранника. б) Докажите, что нормализатор любого полного флага в задаче 7 тривиален.

Многогранник, нормализатор которого в соответствующей группе обратимых аффинных преобразований обладает свойствами 9а и 9б, называется правильным.

Пусть H — гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$, заданная уравнением $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, а $I \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid |x_1|, \ldots, |x_4| \leq 1\}$ — четырехмерный куб. Обозначим $M = I \cap H$ (главное сечение куба).

Задача 10. Пусть $f_1 = (1, 1, -1, -1)$, $f_2 = (1, -1, 1, -1)$, $f_3 = (1, -1, -1, 1)$. а) Докажите, что $M = \{y_1 f_1 + y_2 f_2 + y_3 f_3 \mid |y_1 \pm y_2 \pm y_3| \leq 1\}$ (всего 4 условия с модулем). б) Докажите, что M — многогранник.

Задача 11. а) Опишите вершины, ребра, двумерные и трехмерные грани куба I. б) Опишите вершины, ребра и двумерные грани многогранника M.

Задача 12. а) Докажите, что нормализатор $G = \mathrm{Norm}_{\mathrm{Aff}(4)}(M)$ в группе обратимых аффинных преобразований $\mathbb{R}^4$ транзитивно действует на множестве вершин M. б) Для произвольной вершины $a \in M$ докажите, что ее нормализатор $G_0 = \mathrm{Norm}_G(a)$ в группе G действует транзитивно на множестве ребер, выходящих из этой вершины. в) Для произвольного ребра b, выходящего из вершины a, докажите, что нормализатор $G_1 = \mathrm{Norm}_{G_0}(b)$ в группе G_0 действует транзитивно на двумерных гранях, содержащих ребро b. г) Докажите, что многогранник M правильный. Как он называется?

Указание. Достаточно рассмотреть аффинные преобразования, сохраняющие как I, так и H.