3. ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Пусть S_4 — группа взаимно однозначных отображений множества M из четырех элементов в себя. Можно считать, что это группа отображений множества наборов из 4 попарно различных точек проективной прямой в себя (действует перестановками точек).

Задача 1. а) Сколько элементов в группе S_4? б) Докажите, что S_4 коммутирует с группой дробно-линейных преобразований проективной прямой (т.е. если $f(z) = (az+b)/(cz+d)$, то $\sigma(f(p), f(q), f(r), f(s)) = f(\sigma(p, q, r, s))$, где в правой части f действует на каждую точку по отдельности). в) Пусть $[p, q, r, s] = x$. Докажите, что значение $[\sigma(p, q, r, s)]$ зависит только x и $\sigma \in S_4$. г) Какие значения при этом может принимать $[\sigma(p, q, r, s)]$? д) При каких $\sigma \in S_4$ имеет место равенство $[\sigma(p, q, r, s)] = [p, q, r, s]$?

Задача 2* (для знакомых с теорией групп). а) Докажите, что преобразования из пункта 1д образуют в S_4 нормальную подгруппу K. б) Опишите факторгруппу S_4/K.

Задача 3 (теорема Паппа). Если точки a_1, b_1, c_1 лежат на одной прямой, а точки a_2, b_2, c_2 — также на одной прямой, то точки $a_1b_2 \cap a_2b_1$, $a_1c_2 \cap a_2c_1$, $b_1c_2 \cap b_2c_1$ также лежат на одной прямой.

Задача 4 (теорема Дезарга). Если прямые aa', bb' и cc' пересекаются в одной точке, то точки $ab \cap a'b'$, $ac \cap a'c'$ и $bc \cap b'c'$ лежат на одной прямой.

Задача 5. Докажите, что для произвольного отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$ на плоскости существует проективное преобразование $\mathbb{R}P^2$, переводящее отрезок в себя, но не переводящее его середину в себя. Докажите, что если на плоскости задан отрезок, то нельзя построить его середину, пользуясь только линейкой без делений.

Задача 6. Постройте проективное преобразование плоскости, переводящее окружность $x^2 + y^2 = 1$ а) в гиперболу $x^2 - y^2 = 1$; б) в параболу $x^2 - y = 0$. Куда перейдут при этом бесконечно удаленные точки? Какие точки станут бесконечно удаленными?

Задача 7. Докажите, что центральное проектирование одной прямой в $\mathbb{R}^2$ на другую сохраняет двойное отношение: $\frac{|P'S'|\cdot|Q'R'|}{|R'S'|\cdot|P'Q'|} = \frac{|PS|\cdot|QR|}{|RS|\cdot|PQ|}$, где $f(P) = P'$ и т.д.

Задача 8. а) Постройте проективное преобразование плоскости, переводящее окружность $x^2+y^2 = 1$ в себя, а ее центр O — в заданную точку A внутри окружности. б) Докажите, что если A лежит вне окружности, то такого преобразования не существует. в) Докажите, что если на плоскости нарисована окружность, то нельзя построить ее центр, пользуясь только линейкой без делений.

Указание. Центральное проектирование одной плоскости в $\mathbb{R}^3$ на другую — проективное преобразование.

Задача 9 (теорема Брианшона). Докажите, что большие диагонали шестиугольника, описанного около окружности, пересекаются в одной точке. Можно ли заменить окружность эллипсом? гиперболой?

Задача 10. Пусть $\ell \subset \mathbb{R}P^2$ — прямая, не пересекающая окружность $x^2 + y^2 = 1$. Постройте проективное преобразование, переводящее окружность в себя, а ℓ — в бесконечно удаленную прямую.

Задача 11 (теорема Паскаля). Пусть $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ — шестиугольник, вписанный в окружность. Докажите, что точки $a_1a_2 \cap a_4a_5$, $a_2a_3 \cap a_5a_6$, $a_3a_4 \cap a_6a_1$ лежат на одной прямой. Можно ли заменить окружность эллипсом? гиперболой?

Точка $x_* \in \mathbb{R}$ называется средним гармоническим точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала отсчета a, если $\frac{n}{x_*-a} = \frac{1}{x_1-a} + \cdots + \frac{1}{x_n-a}$.

Задача 12. а) Докажите, что точка x_* является средним гармоническим точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала отсчета a тогда и только тогда, когда для любого t выполнено равенство $[x_1, x_*, t, a]+\cdots+[x_n, x_*, t, a] = n$. б) Докажите теорему Коутса: пусть прямая, вращающаяся вокруг начала координат, пересекает плоскую кривую степени n в n точках $x_1, \ldots, x_n$. Тогда среднее гармоническое точек $x_1, \ldots, x_n$ относительно начала координат движется по некоторой прямой (считается, что начало координат не лежит на кривой). Кривой степени n называется множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$, где P — многочлен степени n.