4. ПРОЕКТИВНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Пусть $\ell \subset \mathbb{R}^3$ — прямая, проходящая через начало координат и содержащая вектор $(a, b, c) \neq 0$. Сопоставим ей плоскость $\ell\check{} \subset \mathbb{R}^3$, заданную уравнением $ax + by + cz = 0$.

Задача 1. а) Докажите, что соответствие $\ell \mapsto \ell\check{}$ определено корректно, т.е. не зависит от выбора вектора на прямой. б) Каков геометрический смысл плоскости $\ell\check{}$?

Тем самым определено соответствие между точками проективной плоскости и проективными прямыми в той же плоскости. Говорят, что точка a и прямая $a\check{}$ двойственны.

Задача 2. Проективное преобразование переводит a в b. Обязательно ли оно переводит $a\check{}$ в $b\check{}$?

Задача 3. Докажите, что если прямая ℓ проходит через точки $a, b \in \mathbb{R}P^2$, то $\ell = c\check{}$, где $c = a\check{} \cap b\check{}$.

Задача 4. а) Какое утверждение получится, если в теореме Дезарга ("Проективные преобразования", задача 4) заменить все объекты (точки и прямые) двойственными? б) Тот же вопрос про теорему Паппа ("Проективные преобразования", задача 3).

Задача 5. а) Докажите, что точка $p \in \mathbb{R}P^2$ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$ тогда и только тогда, когда прямая $p\check{}$ касается этой окружности. б) Докажите, что множество точек $p \in \mathbb{R}P^2$ таких, что прямая $p\check{}$ касается кривой Q, заданной уравнением $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, образует кривую $Q\check{}$, задаваемую уравнением такого же вида: $a'x^2 + b'y^2 + c'xy + d'x + e'y + f' = 0$. Выпишите явно коэффициенты $a', \dots, f'$. в) Докажите, что $(Q\check{})\check{} = Q$.

Задача 6. Какое утверждение получится, если в теореме Паскаля ("Проективные преобразования", задача 11) заменить все объекты (точки, прямые и окружность) двойственными?