6. МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Обозначим $H \subset \mathbb{C}$ верхнюю полуплоскость, $\Omega \subset \mathbb{C}$ — единичный круг с моделью Пуанкаре, $D = \Omega$ — тот же самый круг, но с моделью Клейна, $L = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2-z^2=-1, z>0\} \subset \mathbb{R}^3$ — верхнюю полость двуполостного гиперболоида. Между этими множествами действуют стандартные отображения моделей геометрии Лобачевского, обозначаемые $f_{H\Omega}$ и т.п.

Задача 1. Найдите образ при отображении $f_{H\Omega}$ а) вертикальных лучей, б) горизонтальных прямых, в) окружностей, касающихся вещественной оси в точке 0. г) Докажите, что кривые, полученные в примерах 1а и 1б, пересекаются под прямым углом.

Задача 2. Найдите образ при отображении $f_{\Omega D}$ окружности радиуса $r<1$ с центром в начале координат.

Задача 3. Вычислите отображение $f_{H\Omega} \circ \varphi \circ f_{\Omega H} : \Omega \to \Omega$, где $\varphi : H \to H$ это а) параллельный перенос вдоль вещественной оси, б) растяжение с центром в начале координат, в) инверсия относительно единичной окружности с центром в начале координат.

Задача 4. Вычислите отображение $f_{\Omega H} \circ \varphi \circ f_{H\Omega} : H \to H$, где $\varphi : \Omega \to \Omega$ — поворот на угол φ вокруг начала координат.

Задача 5. а) Докажите, что аффинное преобразование модели Пуанкаре в круге — либо дробно-линейное, коммутирующее с инверсией $z \mapsto 1/\overline{z}$, либо композиция такого преобразования и комплексного сопряжения. б) Докажите, что указанное преобразование это либо $f(z) = \alpha\frac{z+p}{\overline{p}z+1}$, где $|\alpha|=1$ и $|p|<1$, либо $f(\overline{z})$ с таким же f.

Для векторов $v_1 = (x_1,y_1,z_1)$, $v_2=(x_2,y_2,z_2)$ обозначим $B(v_1,v_2) = x_1x_2+y_1y_2-z_1z_2$. Положим также $Q(v) \stackrel{\text{def}}{=} B(v,v)$; таким образом, имеется модель плоскости Лобачевского в гиперболоиде $L = \{v=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid Q(v)=-1, z>0\}$.

Задача 6. Пусть $Q(v_1)=Q(v_2)=0$, причем v_1, v_2 лежат в полупространстве $z>0$. Докажите, что $B(v_1,v_2) \le 0$, и равенство имеет место только если v_1 и v_2 пропорциональны.

Задача 7. а) Пусть ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 и m_1,m_2,m_3 — две тройки попарно различных прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало координат и лежащих на поверхности конуса $Q(v)=0$. Докажите, что существует и почти единственно (уточните!) обратимое линейное преобразование $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $A(\ell_i)=m_i$, $i=1,2,3$ и $Q(A(v))=Q(v)$ для всех $v \in \mathbb{R}^3$. б) Пусть a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2,b_3 — две тройки попарно различных точек на единичной окружности $\omega \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$. Докажите, что существует и единственно проективное преобразование $\varphi : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^2$ такое, что $\varphi(\omega)=\omega$ и $\varphi(a_i)=b_i$, $i=1,2,3$.

Задача 8. а) Докажите, что аффинное преобразование модели Клейна в круге плоскости Лобачевского можно продолжить до проективного преобразования $\mathbb{R}P^2$, сохраняющего круг D. б) Докажите, что аффинное преобразование модели Клейна в гиперболоиде плоскости Лобачевского является ограничением на гиперболоид линейного преобразования $\mathbb{R}^3$, сохраняющего форму Q.

Указание. Один из возможных планов доказательства: 7а $\Longrightarrow$ 7б $\Longrightarrow$ 8а $\Longrightarrow$ 8б.

Задача 9. Вычислите отображение $f_{HD} \circ \varphi \circ f_{DH} : D \to D$, где $\varphi : H \to H$ — те же отображения, что в задаче 3.