7. МЕТРИКА НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Обозначим H верхнюю полуплоскость с метрикой Лобачевского $\varphi(x,y)=k/y$, $k>0$. Пусть $f: H\to H$ — аффинное преобразование плоскости Лобачевского.

Задача 1. Пусть f — преобразование первого рода (дробно-линейное в модели Пуанкаре). а) Докажите, что f имеет не более одной неподвижной точки. б) Пусть f имеет ровно одну неподвижную точку (такие преобразования называются эллиптическими). Докажите, что в модели Пуанкаре в круге существует такое аффинное преобразование g, что gfg^{-1} — поворот вокруг центра круга. в) Пусть f не имеет неподвижных точек. Докажите, что в модели Пуанкаре в полуплоскости существует либо аффинное преобразование g такое, что gfg^{-1} — растяжение $z\mapsto az$ (тогда f называется гиперболическим), $a>0$, либо аффинное преобразование g такое, что gfg^{-1} — параллельный перенос $z\mapsto z+b$ (тогда f — параболическое).

Задача 2. Пусть f — преобразование второго рода (дробно-линейное с сопряжением в модели Пуанкаре). а) Докажите, что преобразование f имеет инвариантную прямую. б) Докажите, что f либо не имеет неподвижных точек, либо неподвижные точки образуют прямую (в последнем случае f называется симметрией относительно этой прямой). в) Докажите, что в модели Пуанкаре в полуплоскости существует такое аффинное преобразование g, что $gfg^{-1}(z)=-a\bar{z}$, $a>0$.

Задача 3. Пусть S_1,S_2 — симметрии относительно прямых Лобачевского ℓ_1,ℓ_2. Докажите, что если ℓ_1,ℓ_2 пересекаются, то преобразование S_1S_2 — эллиптическое, если параллельны, то параболическое, и если расходятся, то гиперболическое.

Площадью фигуры $M\subset H$ на плоскости Лобачевского называется величина $S(M)\stackrel{\text{def}}{=}\int_M k^2/y^2\,dxdy$.

Задача 4. Пусть $A,B\in H$ — точки, лежащие на окружности ω с центром в начале координат, ℓ_A, ℓ_B — лучи с началом A, B соответственно, направленные вертикально вверх. Докажите, что площадь “идеального треугольника” $AB\infty$, ограниченного ω, ℓ_A и ℓ_B, равна $k^2\widehat{AOB}+o(\widehat{AOB})$ при $B\to A$.

Задача 5. а) Пусть A — точка на абсолюте, $B\in H$. Докажите, что площадь “идеального треугольника” $AB\infty$, образованного прямыми (вертикальными лучами) $A\infty$ и $B\infty$ и прямой (окружностью) AB, равна $k^2(\pi-\widehat{AB\infty})$. б) Пусть $A,B\in H$. Докажите, что площадь “идеального треугольника” $AB\infty$ равна $k^2(\pi-\widehat{AB\infty}-\widehat{BA\infty})$.

Задача 6. а) Докажите, что площадь треугольника с углами α, β, γ на плоскости Лобачевского равна $k^2(\pi-\alpha-\beta-\gamma)$. б) Докажите, что площадь n-угольника с углами $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ на плоскости Лобачевского равна $k^2(\pi(n-2)-\alpha_1-\dots-\alpha_n)$.

Следствие (задачи 6). *Сумма углов n-угольника меньше $\pi(n-2)$. Площадь многоугольника не меняется при аффинных преобразованиях.*

Задача 7. Докажите, что следующие равенства эквивалентны: $e^{-x}=\operatorname{tg}(\alpha/2)$, $\operatorname{ch}x=1/\sin\alpha$, $\operatorname{sh}x=\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{th}x=\cos\alpha$.

Задача 8. Расстояние от точки a до прямой Лобачевского ℓ равно d. Найдите угол между двумя прямыми, проходящими через a и параллельными ℓ.

Задача 9. Пусть $\gamma=\pi/2$. Докажите равенства: а) $\operatorname{sh}(a/k)=\operatorname{sh}(c/k)\sin\alpha$, б) $\operatorname{ch}(c/k)=\operatorname{ch}(a/k)\operatorname{ch}(b/k)$.

Задача 10. Докажите равенство $\operatorname{ch}(a/k)\sin\beta=\operatorname{ch}(b/k)\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma$.

Задача 11. Во что переходят равенства задач 9 и 10 при $k\to\infty$?