# 8. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА

Пусть $\mathbb{T}^2$ — фактор плоскости $\mathbb{R}^2$ по следующему отношению эквивалентности: $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ если $x_2 - x_1, y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}$.

**Задача 1.** а) Определите действие группы $\mathbb{Z}^2$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ такое, что $\mathbb{T}^2$ — пространство орбит. Выведите отсюда, что $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$. б) Докажите, что $\mathbb{T}^2$ гомеоморфен декартовому произведению двух окружностей.

**Задача 2.** Пусть $X_1$, $X_2$ — топологические пространства с отмеченными точками $p_1$, $p_2$, $X_1 \times X_2$ — их декартово произведение с отмеченной точкой $p_1 \times p_2$. Докажите, что $\pi_1(X_1 \times X_2) = \pi_1(X_1) \oplus \pi_1(X_2)$.

**Указание.** Воспользуйтесь вложениями $i_{1,2} : X_{1,2} \to X_1 \times X_2$ и проекциями $p_{1,2} : X_1 \times X_2 \to X_{1,2}$ для построения гомоморфизмов групп.

Графом называется топологическое пространство, полученное отождествлением концов (всех или некоторых) конечного или счетного множества отрезков. Отрезки называются ребрами, их концы — вершинами. Граф называется деревом, если он линейно связен и не имеет циклов, то есть замкнутых кривых без самопересечений.

**Задача 3.** Докажите, что любое дерево с конечным числом ребер стягиваемо (гомотопически эквивалентно точке).

**Указание.** Индукция по числу ребер: стягивание “висячего” ребра — гомотопическая эквивалентность.

**Задача 4.** Докажите, что любое дерево односвязно (имеет тривиальную фундаментальную группу).

**Указание.** Для бесконечного дерева воспользуйтесь компактностью отрезка.

Определим *свободную группу от $n$ образующих* $F_n$. Рассмотрим символы $a_1, \ldots, a_n$, $a_1^{-1}, \ldots, a_n$. Как множество $F_n$ есть множество конечных ”слов” (включая пустое) из этих символов с точностью до эквивалентности $Aa_ia_i^{-1}B \sim AB \sim Aa_i^{-1}a_iB$; здесь $A, B$ — произвольные слова, а $i = 1, \ldots, n$. Умножение производится приписыванием одного слова к другому: $A \cdot B = AB$.

**Задача 5.** Докажите, что умножение определено корректно и что $F_n$ — группа.

Рассмотрим граф $\Gamma_n$, вершинами которого будут элементы $F_n$, а ребра соединяют вершины $A$ и $Aa_i$, а также $A$ и $Aa_i^{-1}$, для всех $A$ и $i = 1, \ldots, n$.

**Задача 6.** Докажите, что $\Gamma_n$ — дерево. Сколько ребер выходит из каждой вершины?

Рассмотрим действие группы $F_n$ на множестве вершин графа $\Gamma_n$ умножением слева.

**Задача 7.** Докажите, что действие $F_n$ переводят вершины, соединенные ребром, в вершины, соединенные ребром. Определите действие $F_n$ на графе $\Gamma_n$. Опишите орбиты действия $F_n$ на множестве ребер графа.

Назовем *букетом окружностей* $\vee^n S^1$ объединение $n$ окружностей с одной отождествленной точкой.

**Задача 8.** Докажите, что пространство орбит действия $F_n$ на $\Gamma_n$ есть $\vee^n S^1$. Докажите, что $\pi_1(\vee^n S^1) = F_n$.

**Задача 9.** Докажите, что любой граф с конечным числом ребер гомотопически эквивалентен букету окружностей.

**Указание.** Стягивание ребра, соединяющего различные вершины — гомотопическая эквивалентность.