**НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**
**Парамонова И.М.**

**Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07**

Листок 1

1. Приведите пример
   (a) действия группы Ли на гладком многообразии, орбиты которого не являются подмногообразиями;
   (b) гомоморфизма групп Ли, образ которого не является подгруппой Ли.
2. Опишите все гомоморфизмы групп Ли
   (a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*, \quad \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$
   (b) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^1$;
   (c) $GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$.
3. Найдите явный матричный вид следующих групп:
$$SO(2,\mathbb{R}),\ SO(1,1),\ SU(2),\ SU(1,1).$$
4. Представив тело кватернионов $\mathbb{H}$ в виде двумерного комплексного пространства, опишите следующие группы как подгруппы группы $GL(2,\mathbb{C})$:
   (a) мультипликативную группу $\mathbb{H}^*$,
   (b) мультипликативную группу кватернионов единичного модуля.
5. Найдите размерности следующих групп Ли и опишите явно касательное пространство в единице каждой из этих групп:
   (a) $O(n)$, $SO(n)$, $SO(p,q)$;
   (b) $Sp(2n)$;
   (c) $U(n)$, $SU(n)$, $SU(p,q)$.
6. Для какой-нибудь из групп, перечисленных в задаче 5, докажите непосредственно по определению, что она является линейной группой Ли.
7. Реализуйте группу $GA(n)$ в виде подгруппы Ли группы $GL(n+1)$.
8. Докажите, что
   (a) группа $GL(1,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна окружности;
   (b) группа $SL(2,\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентна окружности;
   (c) группа $SL(2,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна трехмерной сфере (в частности, односвязна).

9. Разложите на неприводимые представление $T$ группы $G$ в пространстве $V$, опишите (а в вещественном случае и нарисуйте) орбиты группы $G$ в каждом из инвариантных подпространств:

   (a) $G = SL(2,\mathbb{R})$ и $G = GL(2,\mathbb{R})$; $V = L(2,\mathbb{R})$, $T = Ad$;

   (b) $G = SL(2,\mathbb{R})$ и $G = GL(2,\mathbb{R})$; $V = L(2,\mathbb{R})$, $T = Bil$;

   (c) $G = SL(2,\mathbb{C})$ и $G = GL(2,\mathbb{C})$; $V = L(2,\mathbb{C})$, $T = Hl$

10. Группы $SL(2)$ и $PSL(2)$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$):

    (a) Докажите, что группа $SL(2)$ совпадает со своим коммутантом.

    (b) Найдите центр $Z$ этой группы.

    (c) Докажите, что факторгруппа $PSL(2) = SL(2)/Z$ проста.

11. Найдите порядок групп $SL(2,\mathbb{F}_q)$, $PSL(2,\mathbb{F}_q)$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Б.Винберг, А.Л.Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.
2. Ж.-П. Серр. Алгебры Ли и группы Ли.
3. И.М.Парамонова, О.К.Шейнман. Задачи семинара "Алгебры Ли и их приложения"