НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07
Листок 10

1. Докажите, что схема Дынкина системы корней Δ несвязна тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\Delta_1 \perp \Delta_2$, причем $V = V_1 \oplus V_2, V_1 \perp V_2$ и Δ_i — система корней в V_i.

   Если Δ является системой корней полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то перечисленные условия эквивалентны тому, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, причем Δ_i — система корней $\mathfrak{g}_i$.

2. Вычислите группы Вейля, матрицы Картана и схемы Дынкина простых классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$ и $\mathfrak{sp}(2n)$.

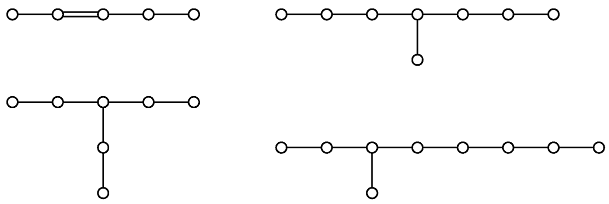
3. Докажите, что в связной схеме Дынкина с числом вершин $n \geq 3$ тройных ребер не бывает.

4. Докажите, что схема Дынкина не может содержать циклов.

5. Назовем узлом вершину, которая соединена более, чем с двумя другими вершинами. Докажите, что схема Дынкина может содержать только тройные узлы с простыми ребрами.

6. Назовем особенностью узел или двойное ребро. Докажите, что схема Дынкина может содержать не более одной особенности.

7. Докажите, что схема Дынкина не может содержать следующих фрагментов:



8. Рассмотрите пространство комплексных 7×7-матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & -A(f^t) & v \\ A(v) & -a^t & -f^t \\ f & -v^t & 0 \end{pmatrix}$$

где $a \in \mathfrak{sl}(3)$, v — вектор-столбец с координатами (v_1, v_2, v_3), f — вектор-строка, а

$$A(v) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Покажите, что можно так выбрать коэффициент α, что указанное пространство образует подалгебру типа G_2 алгебры Ли $\mathfrak{so}(7)$.

9. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — ортонормированный базис евклидова пространства. Докажите, что нижеприведенные системы являются системами корней указанного типа. Найдите для каждой из них систему простых корней и вычислите размерность соответствующей простой алгебры Ли.

$$E_6 : \Delta = \{\varepsilon_p - \varepsilon_q, (\varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r - \varepsilon_s - \varepsilon_t - \varepsilon_u + \sqrt{2}\varepsilon_7)/2, \pm\sqrt{2}\varepsilon_7;\ p, \dots, u = 1, \dots, 6\}$$

$$E_7 : \Delta = \{\varepsilon_p - \varepsilon_q, (\varepsilon_p + \varepsilon_q + \varepsilon_r + \varepsilon_s - \varepsilon_t - \varepsilon_u - \varepsilon_v - \varepsilon_w)/2;\ p, \dots, w = 1, \dots, 8\}$$

$$E_8 : \Delta = \{\pm\varepsilon_p \pm \varepsilon_q, \pm\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{(8)} - \varepsilon_p\right),\ \pm\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{(8)} - \varepsilon_p - \varepsilon_q - \varepsilon_r\right); p, q, r = 1, \dots, 8\},$$

где $\varepsilon^{(8)} = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_8$.

$$F_4 : \Delta = \{\pm\varepsilon_p, \pm\varepsilon_p \pm \varepsilon_q, \frac{1}{2}(\pm\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4);\ p, q = 1, \dots, 4\}$$