НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07
Листок 11

Простые вещественные алгебры Ли

1. Докажите, что овеществление простой комплексной алгебры Ли является простой вещественной алгеброй Ли.

   Определение 1. Вещественная алгебра Ли $\mathfrak{h}$ называется *вещественной формой* комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, если ее комплексификация $\mathfrak{h}(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{g}$.

2. Докажите, что любая вещественная форма простой комплексной алгебры Ли является простой вещественной алгеброй Ли. Верно ли обратное (е.е., верно ли, что комплексификация простой вещественной алгебры Ли является простой комплексной алгеброй Ли)?

   Определение 2. Комплексной структурой в вещественной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется линейный (над $\mathbb{R}$) оператор $I : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющий условиям:

$$I^2 = -\mathrm{id}; \quad I[x, y] = [x, Iy] \text{ для любых } x, y \in \mathfrak{g}.$$

3. Докажите, что в овеществлении $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ любой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть комплексная структура, и наоборот, если $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли с комплексной структурой, то она является овеществлением некоторой комплексной алгебры Ли.

4. Докажите, что если $\mathfrak{g}$ — простая вещественная алгебра Ли, а ее комплексификация $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ содержит нетривиальный идеал $\mathfrak{a}$, то $\mathfrak{g}(\mathbb{C}) = \mathfrak{a} \oplus \bar{\mathfrak{a}}$.

5. Докажите, что если $\mathfrak{g}$ — простая вещественная алгебра Ли, то либо ее комплексификация $\mathfrak{g}(\mathbb{C})$ проста, либо сама $\mathfrak{g}$ допускает комплексную структуру.

   Теорема. Вещественная алгебра Ли проста тогда и только тогда, когда она изоморфна либо овеществлению простой комплексной алгебры Ли, либо вещественной форме простой комплексной алгебры Ли.

6. Докажите теорему.

   Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли.

   Определение 3. Вещественной структурой в $\mathfrak{g}$ называется отображение $\sigma : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, удовлетворяющее условиям:

   (a) $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y); \quad \sigma(\lambda x) = \bar{\lambda}\sigma(x)$ (антилинейность)
   (b) $\sigma^2 = id$ (инволютивность)
   (c) $\sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)]$ (автоморфизм)

7. Докажите, что в комплексификации любой вещественной алгебры Ли есть вещественная структура (какая?).

8. Докажите, что если σ — вещественная структура комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то множество $\mathfrak{g}^\sigma = \{x \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x) = x\}$ является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т.е. $\mathfrak{g}^\sigma$ является вещественной алгеброй Ли и $\mathfrak{g}^\sigma(\mathbb{C}) = \mathfrak{g}$.

9. Докажите, что если σ — вещественная структура в комплексной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и $f \in Aut\mathfrak{g}$, то $f\sigma f^{-1}$ — также вещественная структура, причем $\mathfrak{g}^{f\sigma f^{-1}} = f(\mathfrak{g}^\sigma)$. Если σ' — другая вещественная структура, то вещественные формы $\mathfrak{g}^\sigma$ и $\mathfrak{g}^{\sigma'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}^{\sigma'} = f(\mathfrak{g}^\sigma)$ или, что равносильно, $\sigma' = f\sigma f^{-1}$ для некоторого $f \in Aut\mathfrak{g}$.

10. Покажите, что алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ и $\mathfrak{su}_{k,l}$ (алгебра Ли псевдоунитарной группы $U_{k,l}$) являются вещественными формами простой комплексной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Выпишите вещественные структуры, соответствующие этим формам.

11. Пусть
$$I_{k,l} = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & -1_l \end{pmatrix} \text{ и } L_{k,l} = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & i1_l \end{pmatrix}.$$
Покажите, что отображение $\sigma(X) = I_{k,l}\bar{X}I_{k,l}$ является вещественной структурой в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(k+l,\mathbb{C})$ и опишите явно вещественную алгебру Ли $L_{k,l}^{-1}\mathfrak{g}^\sigma L_{k,l}$, сопряженную соответствующей вещественной форме (какую геометрическую структуру сохраняет эта алгебра Ли?).

12. Обозначим через $\mathbb{H}^m$ правое m-мерное векторное пространство над телом кватернионов $\mathbb{H}$. Представление элемента $q \in \mathbb{H}^m$ в виде $q = z + jw$, где $z, w \in \mathbb{C}^m$ задает изоморфизм $\mathbb{H}^m \to \mathbb{C}^{2m}$ векторных пространств над $\mathbb{C}$, индуцирующий вложение $\mathfrak{gl}(m,\mathbb{H}) \subset \mathfrak{gl}(2m,\mathbb{C})$. Опишите явно образ $\mathfrak{g}$ этого вложения и покажите, что он является вещественной формой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2m,\mathbb{C})$. Выпишите соответствующую вещественную структуру и проверьте, что она является вещественной структорой и на алгебрах $\mathfrak{sl}(2m,\mathbb{C})$ и $\mathfrak{so}(2m,\mathbb{C})$. Соответствующие вещественные формы обозначаются $\mathfrak{sl}(m,\mathbb{H})$ и $\mathfrak{u}^*(m,\mathbb{H})$ (последнее обозначение связано с тем, что эта алгебра сохраняет косоэрмитову квадратичную форму $\sum_{r=1}^m \bar{q}_r j q_r$ в пространстве $\mathbb{H}^m$).

13. Пусть
$$S_m = \begin{pmatrix} 0 & -1_m \\ 1_m & 0 \end{pmatrix}, K_{k,l} = \begin{pmatrix} I_{k,l} & 0 \\ 0 & I_{k,l} \end{pmatrix} \text{ и } M_{k,l} = \begin{pmatrix} L_{k,l} & 0 \\ 0 & L_{k,l} \end{pmatrix}.$$
Рассмотрим подалгебру
$fg = fsp_{k,l} \subset \mathfrak{gl}(k+l,\mathbb{H})$, сохраняющую эрмитову квадратичную форму
$$|q_1|^2 + \cdots + |q_k|^2 - |q_{k+1}|^2 - \cdots - |q_{k+l}|^2,$$
или в описанном в предыдущей задаче изоморфизме $\mathbb{H}^{k+l} \to \mathbb{C}^{2(k+l)}$ форму
$$\sum_{i=1}^{k} |z_i|^2 - \sum_{j=k+1}^{k+l} |z_j|^2 + \sum_{i=1}^{k} |w_i|^2 - \sum_{j=k+1}^{k+l} |w_j|^2.$$
Выпишите явно условия, выделяющие подалгебру $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{sl}(2(k+l),\mathbb{C})$, и выведите из них, что подалгебра $\mathfrak{sp}_{k,l}$ содержится в комплексной симплектической алгебре Ли, соответствующей форме с матрицей $K_{k,l}S_{k+l}$, а сопряженная алгебра $M_{k,l}\mathfrak{g}Mk,l^{-1}$ содержится в стандартной симплектической алгебре Ли $\mathfrak{sp}(2(k+l),\mathbb{C})$.

Покажите, что отображение $\sigma(X) = -K_{k,l}\bar{X}^t K_{k,l}$ задает вещественную структуру на алгебре Ли $\mathfrak{sp}(2(k+l), \mathbb{C})$, соответствующая вещественная форма которой есть $M_{k,l}\mathfrak{sp}_{k,l}M_{k,l}^{-1}$. В частности, алгебра $\mathfrak{sp}_{m,0}$ совпадает с алгеброй $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{H}) \cap \mathfrak{u}(2m)$ (ср. с задачей 9 листка 9).

14. Выпишите все изоморфизмы вещественных алгебр Ли, соответствующие "изоморфизмам малых размерностей"классических комплексных алгебр Ли.