**НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**
**Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07**
Листок 12

## Представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$

1. Разложите на неприводимые естественное действие $L$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в пространстве многочленов от трех переменных $\mathbb{C}[x, y, z]$. Представления с какими старшими весами встречаются в этом разложении?

2. Выпишите явные формулы вложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{vect}(2) = \mathfrak{der}\mathbb{C}[x, y]$, индуцированного действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

3. Ограничьте на $\mathfrak{g}$ представление $T_\lambda$ алгебры Ли $\mathfrak{vect}(2)$ в пространстве $\mathbb{C}[x, y]$, действующее по формуле
$$T_\lambda(D)f = D(f) + \lambda \mathrm{div} D \cdot f, \text{ где } D \in \mathfrak{vect}(2),\ f \in \mathbb{C}[x, y],\ \lambda \in \mathbb{C},$$
(обозначим это ограничение через $\tau_\lambda$) и задайте треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ так, чтобы $1 \in \mathbb{C}[x, y]$ оказалась примитивным вектором.

4. Нарисуйте на плоскости систему корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и весовую диаграмму представления $\tau_\lambda$ (множество его весов).

5. Выясните, при каких $\lambda$ представление $\tau_\lambda$ неприводимо. Разложимо ли $\tau_\lambda$ в тех случаях, когда оно приводимо?

6. Установите связь между неприводимыми компонентами представлений $L$ и $\tau_\lambda$.