НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07

Листок 2

1. Найдите стабилизатор точки в следующем действии и выпишите соответствующие отождествления однородных пространств:

   (a) $SL(2,\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}P^1$; $SL(2,\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}P^1$;

   (b) $SL(n+1,\mathbb{R})$ в $\mathbb{R}P^n$; $SL(n+1,\mathbb{C})$ в $\mathbb{C}P^n$;

   (c) $SL(p+q,\mathbb{R})$ в $G_{p,p+q}(\mathbb{R})$; $SL(p+q,\mathbb{C})$ в $G_{p,p+q}(\mathbb{C})$.

2. Каким геометрическим объектам соответствуют следующие однородные пространства:

   (a) $O(p+q,\mathbb{R})/O(p,\mathbb{R})\times O(q,\mathbb{R})$?

   (b) $O(n,\mathbb{R})/O(k,\mathbb{R}),\ k<n$?

3. Докажите, что множество смежных классов $SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$ естественно отождествляется с плоскостью Лобачевского. Что соответствует прямым на плоскости Лобачевского при этом отождествлении? Как выглядит аналогичное утверждение для смежных классов $SL(2,\mathbb{C})/SU(2)$?

4. Найдите образ группы G в представлении T в пространстве V и примените теорему об эпиморфизме.

   (a) $G=SL(2,\mathbb{R})$, $T=Ad$, $V=\{X\in L(2,\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}X=0\}$;

   (b) $G=SL(2,\mathbb{C})$, $T=Ad$, $V=\{X\in L(2,\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}X=0\}$;

   (c) $G=SL(2,\mathbb{R})$, $T=Bil$, $V=\{X\in L(2,\mathbb{R}) \mid X=X^t\}$;

   (d) $G=SL(2,\mathbb{C})$, $T=Hl$, $V=\{X\in L(2,\mathbb{C}) \mid X=\bar{X}^t\}$

5. Примените теорему об эпиморфизме к следующим представлениям:

$$1)\ T: SL(2;\mathbb{R})\times SL(2;\mathbb{R})\to GL(Mat(2,\mathbb{R})),\quad T(A\times B)(X)=AXB^{-1}$$

$$2)\ T: SU(2)\times SU(2)\to GL(\mathbb{H}),\quad T(p\times q)(h)=phq^{-1},$$

   где элементы группы $SU(2)$ отождествлены с кватернионами единичного модуля.

6. Обозначим через G^0 связную компоненту единицы группы Ли G. Докажите, что

   (a) G^0 является нормальной подгруппой, а прочие компоненты связности суть смежные классы по G^0;

   (b) любая открытая подгруппа $H\subset G$ замкнута и содержит G^0;

   (c) связная группа Ли порождается (как абстрактная группа) любой своей окрестностью единицы.

7. Докажите, что если группа Ли G транзитивно действует на связном гладком многообразии X, то

   (a) подгруппа G^0 также действует транзитивно на X;

   (b) $G/G^0 \cong G_x/(G_x \cap G^0)$ для любой точки $x \in X$;

   (c) если стабилизатор G_x некоторой точки $x \in X$ связен, то и группа G связна.

8. Докажите, что группы $SL(n)$, $SO(n)$ и $Sp(2n)$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), а также группы $U(n)$ и $SU(n)$ связны; группа $O(n)$ имеет две компоненты связности, а группа $O(p,q)$ — четыре компоненты связности.

9. Докажите изоморфизмы:

$$PSL(2,\mathbb{F}_2) \simeq S_3, \quad PSL(2,\mathbb{F}_3) \simeq A_4, \quad PSL(2,\mathbb{F}_4) \simeq A_5.$$