НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07

Листок 3

1. Докажите, что для линейно зависимых элементов x, y, z тождество Якоби следует из билинейности и кососимметричности, а кососимметричность эквивалентна условию $[x, x] = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, если характеристика поля отлична от 2.

2. Покажите, что на любой ассоциативной алгебре A операция $[x, y] = xy - yx$ задает структуру алгебры Ли.

3. Опишите все (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли размерности 1, 2 и 3

   (a) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$.

4. Проверьте, что следующие подпространства образуют подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ (B — произвольная матрица порядка n):

   (a) $\mathfrak{sl}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (специальная линейная алгебра);

   (b) $\mathfrak{g}_B^{Bil} := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid XB + BX^t = 0\}$

   (c) $\mathfrak{g}_B^{Hl} := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid XB + B\bar{X}^t = 0\}$(вещественная подалгебра)

   (d) Найдите явный матричный вид подалгебр $\mathfrak{g}_B^{Bil}$ для $B = 1_n,\ I_{p,q},\ J_{2n}$,

$$B_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix},\ B_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (e) Найдите явный матричный вид подалгебр $\mathfrak{g}_B^{Hl}$ для $B = 1_n,\ I_{p,q}$.

5. (Интерпретация В.И.Арнольда тождества Якоби). Проверьте, что пространство $\mathbb{R}^3$ с векторным умножением образует вещественную алгебру Ли.

   Обозначим через $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ естественную проекцию, а через $\hat{\pi}(v) \subset \mathbb{R}P^2$ — прямую, канонически двойственную точке $\pi(v)$.

   Получите геометрическую интерпретацию векторного произведения, а именно:

   (a) опишите прямую $\hat{\pi}([v, w])$ с помощью точек $\pi(v)$ и $\pi(w)$;

   (b) опишите точку $\pi([v, w])$ с помощью прямых $\hat{\pi}(v)$ и $\hat{\pi}(w)$;

   (c) опишите прямую $\hat{\pi}([v, w])$ с помощью прямой $\hat{\pi}(v)$ и точки $\pi(w)$.

   Получите геометрическую интерпретацию тождества Якоби для векторного произведения в $\mathbb{R}^3$.

6. Опишите все неприводимые конечномерные представления

   (a) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

   (b) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$.

7. Укажите точное конечномерное представление
   (a) n-мерной коммутативной алгебры Ли;
   (b) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
   (c) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$.
8. Покажите, что пространство дифференцирований любой алгебры A образует подалгебру в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(A)$.
9. Опишите все дифференцирования (по модулю внутренних)
   (a) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;
   (b) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$;
   (c) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$;
   (d) $\mathfrak{sl}(2)$.
10. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $x \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathrm{ad}x$ линейный оператор в $\mathfrak{g}$, заданный формулой $(\mathrm{ad}x)y = [x,y]$. Докажите, что $\mathrm{ad}x$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (внутреннее дифференцирование), а соответствие $x \mapsto \mathrm{ad}x$ является представлением $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{g}$, ядро которого совпадает с центром алгебры $\mathfrak{g}$. Покажите также, что пространство внутренних дифференцирований $\mathfrak{int}(\mathfrak{g})$ образуют идеал в алгебре Ли всех дифференцирований $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$.
11. Покажите, что нормализатор $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] \in \mathfrak{h}\ \forall y \in \mathfrak{h}\}$ и централизотор $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y] = 0\ \forall y \in \mathfrak{h}\}$ любого линейного подпространства $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}$, причем централизатор $\mathfrak{z}(\mathfrak{h})$ является идеалом в нормализаторе $\mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.
12. Покажите, что подпространство $\mathrm{Vect}^l\, G \subset \mathrm{Vect}\, G$ левоинвариантных векторных полей на группе Ли G является подалгеброй алгебры Ли $\mathrm{Vect}\, G$ всех векторных полей, изоморфной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G.