НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07
Листок 4

1. Алгебрами Ли каких групп Ли являются алгебры Ли задачи 4 листка 3?

2. Найдите алгебры Ли следующих групп Ли:

   (a) $SO(n)$, $Sp(2n)$, $U(n)$, $SU(n)$;

   (b) $B(n)$ — группа невырожденных треугольных матриц порядка n;

   (c) $N(n)$ — группа треугольных матриц порядка n с единицами на главной диагонали;

   (d) группа Гейзенберга $HEI(2n+1)$ — группа матриц порядка $n+2$ вида
   $$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   где a — это строка длины n, b — столбец длины n, $c \in \mathbb{C}$, а 1_n — единичная матрица порядка n;

   (e) полная аффинная группа $GA(n)$ — группа всех невырожденных аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства S (как реализовать алгебру Ли $\mathfrak{ga}(n)$ квадратными матрицами порядка $(n+1)$?).

3. Докажите изоморфизмы следующих вещественных алгебр Ли (сравните результат с задачами 4 и 5 листка 2):

   (a) $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$;

   (b) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$;

   (c) $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$;

   (d) $\mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$;

   (e) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(1,3)$.

4. Докажите изморфизм $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ и выпишите его явно в матричном виде.

5. Пусть T и S — линейные представления группы Ли G в пространствах V и U соответственно, а dT и dS — их дифференциалы. Найдите дифференциалы сопряженного представления T^* и произведения $T \otimes S$.

6. Пусть T — линейное представление группы Ли G в пространстве V и H — стабилизатор вектора $v \in V$. Докажите, что
   $$\mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} \mid dT(\xi)v = 0\},$$
   где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли группы H.

7. Покажите, что алгеброй Ли группы $Aut\ G$ автоморфизмов произвольной алгебры $\mathcal{A}$ является алгебра $\mathfrak{der}\mathcal{A}$ дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$.