НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07

Листок 6

1. Докажите следующие утверждения.

   (a) Любая подалгебра и любая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.

   (b) Если идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешимы, то $\mathfrak{g}$ — разрешима.

   (c) Если $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ — разрешимые идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

2. Докажите, что замыкание Мальцева идеала является идеалом.

3. Докажите, что алгебра Ли полупроста тогда и только тогда, когда она не имеет коммутативных идеалов.

4. Пусть T — комплексное конечномерное неприводимое представление связной группы Ли G. Докажите, что ограничение представления T на радикал группы G скалярно. Сформулируйте соответствующее утверждение для алгебр Ли.

5. Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, а $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ — ее комплексификация.

   (a) Докажите, что подпространство $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ является подалгеброй тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

   (b) Докажите, что $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})'=\mathfrak{g}'_{\mathbb{C}}$ и, следовательно, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ разрешима (нильпотентна) тогда и только тогда, кога $\mathfrak{g}$ разрешима (нильпотентна).

   (c) Докажите, что $\mathrm{rad}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}=(\mathrm{rad}\mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$ и, значит, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ полупроста.

6. Пусть $\mathfrak{g}=\oplus\mathfrak{g}_i=\mathfrak{vect}(n)=\mathfrak{der}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ — алгебра Ли формальных векторных полей с естественной градуировкой: $\deg x_i=1$.

   (a) Опишите явный вид элементов $D\in\mathfrak{g}$ и компоненты $\mathfrak{g}_{-1}$ и $\mathfrak{g}_0$.

   (b) Выпишите образы элементов канонического базиса $e,\ f,\ h$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ в алгебре Ли $\mathfrak{vect}(2)$. Покажите, что неприводимыми компонентами индуцированного этим вложением представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ в пространстве $\mathbb{C}[x,y]$ являются подпространства однородных многочленов (Представление $\mathfrak{sl}(2)$ в пространстве однородных многочленов степени k будем обозначать L_k).

   (c) Выпишите матрицы операторов, отвечающих элементам $e,\ f,\ h$, в мономиальном базисе L_k.

   (d) Опишите явно вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)\subset\mathfrak{vect}(1)$, индуцированное действием группы $SL(2,\mathbb{C})$ на проективной прямой $\mathbb{C}P^1$.

   (e) Опишите явно вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n+1)\subset\mathfrak{vect}(n)$, индуцированное действием группы $SL(n+1,\mathbb{C})$ на проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$.

   (f) Опишите явно вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(p+q)\subset\mathfrak{vect}(pq)$, индуцированное действием группы $SL(p+q,\mathbb{C})$ на грассмановом многообразии $G_{p,p+q}(\mathbb{C})$.

(g) Проверьте, что формула

$$T_\lambda(D)(f) = D(f) + \lambda \mathrm{div}(D) f, \quad D \in \mathfrak{g},\ f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$. При каких λ оно неприводимо?

(h) Проверьте, что подпространство бездивиргентных векторных полей

$$\mathfrak{svect}(n) = \{D \in \mathfrak{vect}(n) \mid \mathrm{div}(D) = 0\}$$

образует подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{vect}(n)$.