**НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**
**Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07**

Листок 7

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли, а $X, Y$ — ее элементы. Докажите тождества:
$$(\mathrm{ad}X)^n Y = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m X^{n-m} Y X^m;$$
$$X^n Y = \sum_{m=0}^{n} C_n^m (\mathrm{ad}X)^{n-m} Y X^m.$$

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем $\mathbb{K}$; $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Докажите тождество:
$$(\mathrm{ad}X - \lambda - \mu)^n [Y, Z] = \sum_{m=0}^{n} C_n^m [(\mathrm{ad}X - \lambda)^{n-m} Y, (\mathrm{ad}X - \mu)^m Z].$$

3. К каким классам относятся алгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n+1)$, $\mathfrak{ga}(1)$, $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$?

4. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Можно ли утверждать, что $\mathfrak{g}$ полупроста?

5. Опишите все регулярные элементы алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{ga}(1)$.

6. Для каждой из классических алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n) (n \geq 2)$, $\mathfrak{so}(n, n) (n \geq 3)$, $\mathfrak{so}(n + 1, n) (n \geq 1)$ и $\mathfrak{sp}(2n), (n \geq 1)$
   (a) укажите какую-нибудь (желательно наиболее простую) картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$;
   (b) найдите ранг $\mathfrak{g}$;
   (c) выпишите корневое разложение и систему корней;
   (d) докажите, что $\mathfrak{g}$ проста.

   Нарисуйте на плоскости системы корней алгебр Ли $\mathfrak{sl}(3)$, $\mathfrak{so}(2, 2)$, $\mathfrak{so}(3, 2)$ и $\mathfrak{sp}(4)$.

   Проста ли алгебра Ли $\mathfrak{so}(2, 2)$?

7. Опишите все алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с одномерным коммутантом.

8. Найдите радикал аффинной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(n)$.

9. Опишите все комплексные алгебры Ли размерности 4, не являющиеся разрешимыми.

10. Докажите, что любые две инвариантные симметрические билинейные формы на простой комплексной алгебре Ли пропорциональны, и найдите коэффициент пропорциональности между формой Картана-Киллинга и формой
$$\omega(X, Y) = \mathrm{tr} XY$$
для алгебр Ли задачи 6. Пропорциональны ли эти формы на $\mathfrak{gl}(n)$?

11. Пусть $G$ — группа Ли с инвариантной римановой метрикой.

    (a) Докажите, что любая геодезическая, проходящая через единицу группы, является однопараметрической подгруппой, и наоборот.

    (b) Докажите, что всякая геодезическая на $G$ получается левым сдвигом из некоторой однопараметрической подгруппы.