НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07

Листок 8

Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$

1. Рассмотрим стандартный базис в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$:
$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Проверьте коммутационные соотношения:
$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

2. Пусть
$$H = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad E = x\frac{\partial}{\partial y}, \quad F = y\frac{\partial}{\partial x}.$$
Проверьте, что соответствие $h \to H, e \to E, f \to F$ задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathbb{C}[x, y]$ многочленов от переменных x, y, в котором подпространства Pol_n однородных многочленов степени n образуют неприводимые инвариантные подпространства.

3. Обозначим через H, E, F образы элементов h, e, f в произвольном комплексном конечномерном представлении алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$. Докажите следующие соотношения между операторами:
$$1)\ [H, E^k] = 2kE^k, \quad [H, F^k] = -2kF^k, \quad [E, F^k] = kF^{k-1}(H - (k-1));$$
2)Оператор $\Delta = 2(EF + FE) + H^2 = 4FE + H^2 + H$ коммутирует с H, E, F.

4. Докажите, что если v — собственный вектор оператора H с собственным значением λ, то либо $Ev = 0$, либо Ev — собственный вектор оператора H с собственным значением $\lambda+2$. Аналогично, если $Fv \neq 0$, то Fv — собственный вектор оператора H с собственным значением $\lambda - 2$. Выведите отсюда, что в пространстве любого комплексного конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ существует *примитивный вектор*, т.е. ненулевой вектор v_Λ, такой что
$$Hv_\Lambda = \Lambda v_\Lambda \text{ и } Ev_\Lambda = 0.$$

5. Докажите, что если v_Λ — примитивный вектор, то подпространство V, натянутое на векторы вида $v_k = F^k v_\Lambda$, является $\mathfrak{g}$-инвариантным, а $\mathfrak{g}$-действие в нем задается формулами:
$$Hv_k = (\Lambda - 2k)v_k, \quad Ev_k = k(\Lambda - k + 1)v_{k-1}, \quad Fv_k = v_{k+1}.$$
Выведите отсюда, что если $\dim V = m$, то $\Lambda = n = m - 1$.

6. Докажите утверждение (описание неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$):

(a) В каждой размерности $m \in \mathbb{N}$ существует ровно одно с точностью до эквивалентности неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Спектр оператора H в этом представлении всегда целочисленный и простой.

(b) В любом таком представлении существует единственный примитивный вектор (старший вектор), его вес равен $n = m - 1$. (Само представление принято называть представлением со старшим весом n. Мы будем обозначать его T_n.) Спектр T_n имеет вид $n, n-2, n-4, \dots, -n$.

(c) Если $v \in T_n$ — весовой вектор веса k, то $F^k v \neq 0$ при $k > 0$ и $E^{-k} v \neq 0$ при $k < 0$.

7. (a) Докажите, что
$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

   (b) Комплексные представления каждой пары из трех алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, $\mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ находятся во взаимно однозначном соответствии, причем они приводимы или неприводимы одновременно.

   (c) Докажите, что любое комплексное конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ или $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ вполне приводимо.

8. Выведите из предыдущей задачи свойства произвольного комплексного конечномерного представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$:

   (a) оператор H всегда диагонализуем и его спектр целочислен;

   (b) число k является весом тогда и только тогда, когда $-k$ является весом;

   (c) если k — вес, а V^k — соответствующее весовое подпространство, то при $k > 0$ отображение $F^k : V^k \to V^{-k}$ — изоморфизм линейных пространств, а при $k < 0$ отображение $E^k : V^k \to V^{-k}$ — изоморфизм линейных пространств.

9. Пусть T_m и T_n — неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ со старшими весами m и n соответственно. Разложить на неприводимые их тензорное произведение $T_m \otimes T_n$.

10. Покажите, что в пространстве представления T_n существует невырожденная $\mathfrak{sl}(2)$-инвариантная билинейная форма. Что можно сказать о ее симметричности?

11. Докажите, что представления T_n и T_n^* изоморфны.

12. Разложите на неприводимые представления $S^2(T_n)$ и $\Lambda^2(T_n)$ — симметрический и внешний квадраты представления T_n. Какое из них содержит тривиальное подпредставление?

13. Докажите, что представление T_n изоморфно представлению $S^n(T_1)$.

14. Чему равен след оператора e^{tH} в представлении T_n (характер представления T_n)?

15. Найдите размерность пространства инвариантов в тензорной степени $T_1^{\otimes n}$.