НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07
Листок 9

1. Используя только свойства корневого разложения, докажите, что не существует полупростых алгебр Ли размерностей 4, 5 и 7.

2. Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее картановская подалгебра, а Δ — система корней. Рассмотрим вещественные линейные пространства E и $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, натянутые на корни $\alpha \in \Delta$ и элементы h_α соответственно:
$$E = \{\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha \alpha \mid c_\alpha \in \mathbb{R}\}, \quad \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = \{\sum_{\alpha\in\Delta} c_\alpha h_\alpha \mid c_\alpha \in \mathbb{R}\}$$
Докажите, что $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h}$ и $E = \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$.

3. Докажите, что ограничение формы Картана-Киллинга на $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ является положительно определенной вещественной формой.

4. Нарисуйте все абстрактные системы корней (как приведенные, так и неприведенные) ранга 1 и 2. Для приведенных укажите систему простых корней. Какие из них являются системами корней известных Вам классических алгебр Ли?

5. Докажите, что если c — положительное вещественное число, а в системе корней Δ имеются корни, длина которых равна c, то все они составляют систему корней в натянутом на них подпространстве. Опишите варианты, возникающие в системах корней ранга 2.

6. Для каждой из классических алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)(n \geq 2)$, $\mathfrak{so}(n, n)(n \geq 3)$, $\mathfrak{so}(n+1, n)(n \geq 1)$ и $\mathfrak{sp}(2n), (n \geq 1)$ выпишите какую-нибудь систему простых корней.

7. Докажите, что центр всякой связной полупростой линейной группы Ли конечен.

8. Что можно сказать о радикале компактной группы Ли?

9. Пусть G — это группа линейных преобразований n-мерного векторного пространства над телом кватернионов, сохраняющих кватернионную эрмитову форму $(p, q) = p_1\overline{q}_1 + \dots p_n\overline{q}_n$. Докажите, что G изоморфна унитарно-симплектический группе: $G \cong Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$.

10. Докажите, что все комплексные конечномерные представления групп Ли $SL(n, \mathbb{R})$, $SO(n, n)$ и $Sp(2n, \mathbb{R})$ вполне приводимы.