НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 07

Экзамен - 2

Работу можно либо оставить в учебной части в ячейке И.М.Парамоновой, либо сдать в руки И.М.Парамоновой или В.Н.Иванову. Работы будут приниматься до 19:00 среды 19 марта.

1. Опишите все пятимерные алгебры Ли, не являющиеся разрешимыми,

   а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$.

2. Опишите все связные вещественные пятимерные группы Ли, не являющиеся разрешимыми.

3. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

   (a) Выпишите явные формулы вложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{vect}(1) = \mathfrak{der}\mathbb{C}[x]$, индуцированного действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на проективной прямой $\mathbb{C}P^1$.

   (b) Ограничьте на $\mathfrak{g}$ представление T_λ алгебры Ли $\mathfrak{vect}(1)$ в пространстве $\mathbb{C}[x]$, действующее по формуле

   $$T_\lambda(D)f = D(f) + \lambda \mathrm{div} D \cdot f, \text{ где } D \in \mathfrak{vect}(2),\ f \in \mathbb{C}[x],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

   (обозначим это ограничение через τ_λ) и задайте треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ так, чтобы $1 \in \mathbb{C}[x]$ оказалась примитивным вектором.

   (c) Нарисуйте весовую диаграмму представления τ_λ (множество его весов).

   (d) Выясните, при каких λ представление τ_λ неприводимо. Разложимо ли τ_λ в тех случаях, когда оно приводимо? Для приводимых τ_λ укажите все неприводимые подпредставления и факторпредставления.

4. Разложите на неприводимые тензорное произведение $S^2(id) \otimes \Lambda^2(id)$ симметрического и внешнего квадратов тавтологического представления id алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4)$. Нарисуйте весовые диаграммы всех возникающих в этой задаче представлений: $S^2(id)$, $\Lambda^2(id)$, $S^2(id) \otimes \Lambda^2(id)$ и представлений, входящих в разложение.