1. Задачи по теории вероятностей (14.09.07)

1. Предположим, что пространство Ω_n состоит из всевозможных слов длины n в алфавите из r букв (всякая последовательность букв считается словом) и $\mathbf{P}_n(\omega) = 1/|\Omega_n|$, $\omega \in \Omega_n$. Найти вероятность того, что первая буква случайно выбранного слова совпадет с первой буквой алфавита.

2. Будем считать слова из задачи 1 эквивалентными, если они переходят друг в друга при перестановке букв. Пусть Ω — множество классов эквивалентных слов и все классы эквивалентности имеют одинаковые вероятности. Найти вероятность того, что в словах из случайно выбранного класса первая буква алфавита встретится дважды.

3. Будем считать, что пространство Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, состоит из последовательностей $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_i \in \{0, 1\}$, и

$$\mathbf{P}_n(\omega) = p^{\omega_1+\cdots+\omega_n}(1-p)^{n-\omega_1-\cdots-\omega_n},$$

где $p \in [0, 1]$ фиксировано. Определим случайные величины $\xi_i = \xi_i(\omega)$ равенством $\xi_i(\omega) = \omega_i$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $1 \le l \le n$, $1 \le i_1 \le \cdots \le i_l \le n$ и $x_1, \ldots, x_l \in \{0, 1\}$. Найти $\mathbf{P}_n(\xi_i = x_1, \ldots, \xi_l = x_l)$.

4. В условиях задачи 3 найти $p_n(k) := \mathbf{P}_n(\sum_{i=1}^n \xi_i = k)$, $k = 0, \ldots, n$.

5. Исследовать последовательность $p_n(k)$ из задачи 4 при фиксированном n на монотонность по k. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le n} p_n(k) = 0$.

6. Доказать, что при всяком $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:|\frac{k}{n}-p|<\varepsilon} p_n(k) = 1.$$

7. Пусть пространство Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, состоит из всех последовательностей нулей и единиц длины n, в которых две единицы не стоят рядом, и пусть $\mathbf{P}_n(\omega) = 1/|\Omega_n|$ для каждого $\omega \in \Omega_n$. Введем случайные величины ξ_i так же, как в задаче 3. Верно ли, что существует предел при $n \to \infty$ вероятности $\mathbf{P}_n(\xi_1)$?

8. Предположим, что пространство Ω_n, $n \in \mathbb{N}$, состоит из ломаных с вершинами в точках решетки $\mathbb{Z}^2$ и со звеньями, имеющими наклон $\pm 45^o$ к горизонтальной оси, выходящих из точки $(0, 0)$. Вероятность каждой ломаной, заканчивающейся в точке (x, y), равна $p^{(x+y)/2}(1-p)^{(x-y)/2}$, где $p \in (0, 1)$ фиксировано. Доказать, что если $p > 1/2$, то при $n \to \infty$ вероятность того, что случайная ломаная ни разу не попадет в нижнюю полуплоскость имеет положительный предел.

9. Пространство Ω_n состоит из всех последовательностей $\omega = (\omega_0 \ldots, \omega_n)$, $\omega \in \mathbb{Z}^2$, причем $\omega_0 = (0, 0)$ и если $\omega_k = (x_k, y_k)$, $k = 0, \ldots, n-1$, то $\omega_k \in \{(x_k + 1, y_k), (x_k, y_k + 1)\}$. Вероятность $\mathbf{P}_n(\omega)$ определяется равенством $\mathbf{P}_n(\omega) = p(w_1) \ldots p(\omega_n)$, где $p(\omega_k) = p(x_k, y_k) = \frac{x_k}{k+1}$, если $x_k = x_{k-1} + 1$, и $p(\omega_k) = p(x_k, y_k) = \frac{y_k}{k+1}$, если $y_k = y_{k-1} + 1$, $k \ge 1$. Доказать, что $\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}_n(\omega) = 1$. Найти вероятность того, что $\omega_n = (x, y)$, $x + y = n$.