2. Задачи по теории вероятностей (21.09.07)

Задачи по комбинаторике

1. Считая, что в году 365 дней, найти вероятность того, что в группе, состоящей из n человек, никакие два человека не родились в один день. Указать по возможности минимальное n, при котором эта вероятность $< 1/2$.

2. Из ящика, содержащего k красных и r черных шаров, извлекают наугад n шаров (шары одного цвета неразличимы). Найти вероятность того, что среди них будет ровно k_1 красных.

3. В озере имеется неизвестное число N рыб. Чтобы оценить это число, вылавливают n рыб, метят их и выпускают обратно. Затем снова вылавливают n рыб (какие попадутся) и судят об N по числу меченых рыб во втором улове. Найти вероятность $p_k(N,n)$ того, что это число равно k. Найти N, при котором эта вероятность макимальна (при фиксированных n и k).

4. Идя на экзамен, студент А знает k билетов из общего числа n. Перед началом экзамена студенты договариваются, в каком порядке они будут вытаскивать билеты. Считая, что билеты вытаскиваются наугад, выяснить, зависит ли от этого порядка вероятность, что студент А вытащит знакомый ему билет.

5. В офисе торговой фирмы были надписаны конверты для писем, адресованных n клиентам, но по рассеянности сотрудника письма были разложены по ним в случайном порядке. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попало в свой конверт, и предел этой вероятности при $n \to \infty$.

6. С помощью комбинаторных соображений доказать, что

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0, \qquad \sum_{k=0}^{n}(C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Задачи о вероятностном пространстве

7. Доказать, что множество значений вероятности $P(A)$, где A пробегает σ-алгебру событий, является замкнутым (полезно вначале рассмотреть случай, когда Ω — конечное или счетное множество и все его подмножества считаются событиями).

8. Привести пример попарно независимых событий A, B, C, котрые зависимы в совокупности. Какова минимальная мощность пространства Ω, в котором могут существовать такие события?

9. При каждом $n \in \mathbb{N}$ привести пример $n+1$ зависимых в совокупности событий, каждые n из которых независимы в совокупности.

10. Привести пример таких событий A, B, C, что A и C независимы, B и C независимы, но $A \cup B$ и C зависимы.