3. Задачи по теории вероятностей (28.09.07)

1. По n ящикам случайным образом раскладывают $n+2$ шаров (шары различимы — статистика Максвелла–Больцмана). Найти вероятность того, что в каждом ящике будет хотя бы один шар.

2. Отрезок натурального ряда $\Delta = [1, mn]$ разбит на m равных отрезков Δ_i длины n. Из Δ случайным образом выбирается $k \geq n$ чисел. Найти вероятность того, что среди них есть числа из всех Δ_i.

3. Предположим, что Ω — счетное множество, $\mathcal{F}$ — семейство всех его подмножеств и $\mathcal{F}_1$ — некоторая σ-алгебра, $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$. Доказать, что если на $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ задана вероятностная мера, то ее можно продолжить на $(\Omega, \mathcal{F})$.

4. Доказать формулу для вероятности осуществления хотя бы одного события из заданных событий $A_1, \ldots, A_n$:

$$\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k,$$

где

$$S_k = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \mathbf{P}(A_{i_1} \ldots A_{i_k}).$$

5. Пусть p_n^m — вероятность осуществления ровно m событий из $A_1, \ldots, A_n$ (см. задачу 4) и p_n^{m+} — вероятность осуществления не менее m событий. Доказать, что

$$p_n^m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^m S_{m+k},$$

и вывести формулу для p_n^{m+}.

6. Построить пример последовательности событий $A_1, A_2, \ldots,$ для которой $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0$ и $\sum_n \mathbf{P}(\bar{A}_n A_{n+1}) < \infty$ (где $\bar{A}_n = \Omega \setminus A_n$), но $\sum_n \mathbf{P}(A_n) = \infty$.

7. Выяснить, существуют ли на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где Ω состоит из четырех точек, имеющих равные вероятности, две независимые случайные величины, каждая из которых не является п.н. константой. Как будет выглядеть ответ, если 4 точки заменить на n точек?

8. Пусть Ω — отрезок $[0, 1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и мерой Лебега $\mathbf{P}$. Существуют ли на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ две независимые случайные величины, одна из которых равна $\sin\omega$, а другая, не является константой с вероятностью 1.