4. Задачи по теории вероятностей (19.10.07)

1. При каком условии объединение конечного числа независимых в совокупности событий может иметь вероятность 1?

2. Пусть $x_1, x_2, \dots$ — независимые случайные величины, для которых $\mathbf{P}(x_n = 0) = \mathbf{P}(x_n = 1) = 1/2$, $n = 1, 2, \dots$. При каждом n обозначим через y_n максимальное $k \in \mathbb{N}$, для которого $x_i = 1$ при $i = n, n-1, \dots, n-k+1$, и положим $y_n = 0$, если $x_n = 0$. С помощью леммы Бореля-Кантелли доказать, что

$$\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} \frac{\max_{m\le n} y_m}{\log_2 n} \le 1) = 1$$

(можно доказать больше, а именно: $\max_{m\le n} y_m / \log_2 n \to 1$ п.н.).

3. При каких условиях случайные величины ξ и ξ^2 независимы?

4. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с непрерывными функциями распределения. Доказать, что $\mathbf{P}(\xi = \eta) = 0$. Верно ли это утверждение без предположения непрерывности?

5. Пусть F — функция распределения, G_F — множество ее точек роста (т.е. таких точек $x \in \mathbb{R}$, что $F(x+a) - F(x-a) > 0$ при всех $a > 0$) и μ_F — построенная по ней вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Доказать, что $\mu_F(G_F) = 1$.

6. Пусть $\{F_n\}$ — последовательность непрерывных кусочно-линейных функций на $[0,1]$, которая староится следующим образом: $F_0(x) = x$ и если F_n уже построена и $[a,b]$ — неудлиняемый отрезок, на котором F_n линейна, то он делится на три равные части, на средней из которых функция F_{n+1} полагается равной среднему значению F_n на $[a,b]$, а на двух оставшихся отрезках F_{n+1} получается линейной интерполяцией. Доказать, что F_n равномерно сходится к непрерывной функции распределения F, множество точек роста которой имеет нулевую лебегову меру.

7. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины с одной и той же непрерывной функцией распределения. При почти каждом ω все числа $\xi_i(\omega)$ различны (см. зад. 4) и их можно расположить в порядке возрастания: $\eta_1(\omega) < \dots < \eta_n(\omega)$. Найти функцию распределения случайной величины η_k, $1 \le k \le n$, и функцию распределения случайного вектора $(\eta_1, \dots, \eta_n)$.

8. Пусть Ω — отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{F}$ и мерой Лебега $\mathbf{P}$. Рассмотрим случайные величины $\xi(\omega) = \sin\omega$ и $\eta(\omega) = \cos\omega$. Являются ли они независимыми?