5. Задачи по теории вероятностей (26.10.07)

1. Пусть X_n — момент первого успеха в последовательности независимых испытаний с вероятностью успеха p_n в каждом. В предположении, что $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n > nt), \quad t > 0.$$

2. Пусть S_n — число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p_n в каждом. В предположении, что $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, найти

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(S_n = k), \quad k = 0, 1, \ldots.$$

3. Доказать, что если функция распределения непрерывна, то она равномерно непрерывна.

4. С помощью результата задачи 3 доказать, что свертка двух функций распределения непрерывна, если хотя бы одна из них непрерывна.

5. Найти свертку n показательных распределений с параметром λ.

6. Рассмотрим окружность C длины 1 с фиксированной точкой x_0 и фиксированным направлением обхода. Выберем на C две независимые случайные точки X_1, X_2 с равноверным распределением каждую. Найти распределение длин дуг (проходимых в выбранном направлени) Δ_i, $i = 1, 2, 3$, где $\Delta_1 = X_1X_2$, $\Delta_2 = X_2X_1$ и Δ_3 — та из дуг Δ_1, Δ_2, которой принадлежит точка x_0.

7. Найти вероятность того, что случайно выбранная хорда окружности C из задачи 6 будет длиннее стороны вписанного в C правильного треугольника (ответ может зависеть от интерпретации слов "случайно выбранная").

8. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины с одной и той же непрерывной функцией распределения F. При фиксированном ω рассмотрим функцию распределения F_n^ω случайной величины, принимающей значения $\xi_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, n$ с вероятностью $1/n$ каждое. Доказать, что распределение случайной величины

$$\eta_n(\omega) := \sup_x |F_n^\omega(x) - F(x)|$$

не зависит от F. (Указание: воспользоваться тем, что $F_\xi(\xi)$ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, если F_ξ непрерывна.)