6. Задачи по теории вероятностей (09.11.07)

1. На отрезок $[0,1]$ бросают две независимые равномерно распределенные точки. Найти распределение длины каждого из трех отрезков, на которые эти точки разбивают отрезок $[0,1]$.

2. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины, каждая из которых принимает значение 1 с вероятностью $p \in (0,1)$ и значение 0 с вероятностью $q = 1-p$. Пусть $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \xi_n$, где $\lambda = \beta^{-1}$. Доказать, что функция распределения F_ξ случайной величины ξ удовлетворяет тождеству $F_\xi(x) = pF_\xi(\beta x - 1) + qF_\xi(\beta x)$. Доказать, что F_ξ — непрерывная функция.

3. Найти свертку двух распределений Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

4. Найти свертку двух равномерных распределений на отрезке $[0,1]$ и двух Г-распределений с одним и тем же масштабным параметром λ.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию следующих распределений: а) пуассоновского, б) нормального, в) Г-распределения, г) распределения Коши.

6. Из сосуда, содержащего a красных и b белых шаров, извлекается случайный набор, состоящий из n шаров (все такие наборы считаются равновероятными). Найти распределение, математическое ожидание и дисперсию числа красных шаров в этом наборе. (Указание: при вычислении моментов полезно рассмотреть ситуацию, когда шары извлекаются последовательно.)

7. Доказать, что для всякой случайной величины ξ со значениями в $\mathbb{Z}_+$ выполняется равенство $\mathbf{M}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi \geq n)$.

8. Случайный вектор $\xi^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{n+1}^{(n)})$ распределен равномерно на поверхности n-мерной сферы радиуса $\sqrt{n}$. Доказать, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины $\xi_1^{(n)}$ сходится к нормальному (в смысле поточечной сходимости функции распределения).

9. Каждому случайному вектору $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, для которого $\mathbf{M}\xi_i^2 < \infty$ при $i = 1, \dots, n$, соответствует ковариационная матрица (матрица ковариаций) $C = (c_{i,j})$, где $c_{i,j} = cov(\xi_i, \xi_j)$. Доказать, что всякая ковариационная матриаца неотрицательно определена.

10. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется гауссовским (нормальным), если всякая линейная комбинация $c_1\xi_1 + \dots + c_n\xi_n$ имеет нормальное распределение (распределение, сосредоточенное в точке, также считается нормальным). Доказать, что если $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — гауссовский вектор и $cov(\xi_1, \xi_2) = 0$, то ξ_1 и ξ_2 независимы.

11. Доказать, что гауссовский вектор имеет плотность распределения в том и только том случае, когда его ковариационная матрица невырожденна.