7. Задачи по теории вероятностей (30.11.07)

1. Доказать, что для случайной величины ξ неравенства $\mathbf{M}\xi^2 < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{P}(|\xi| > n) < \infty$ равносильны.

2. Предположим, что последовательность независимых случайных величин ξ_n сходится по вероятности к случайной величине ξ. Какое распределение может иметь ξ?

3. Предположим, что случайная величина ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, с вероятностью $1/2$ равна λ^n и с вероятностью $1/2$ равна $-\lambda^n$, где $\lambda > 0$. Пусть ξ_i независимы и $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$. При каких λ отношение S_n/n сходится по вероятности к нулю?

4. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{M}\xi_i > 0$ и $S_n = \xi_1 + \dots \xi_n$. Доказать, что $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = 1$.

5. Пусть $A_1, A_2, \dots$ — попарно независимые события, I_{A_i} — индикаторная функция, $i = 1, 2, \dots$, и $S_n^{n+k} = I_{A_n} + \dots + I_{A_{n+k}}$. Доказать, что S_n^{n+k} при каждом n с вероятностью 1 стремится к $+\infty$.

6. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что если почти наверное $S_n/n \to c \in \mathbb{R}$, то $\mathbf{P}(\xi_n \geq n$ при бесконечно многих $n) = 0$. Вывести отсюда, что $\mathbf{M}|\xi_n| < \infty$ и $\mathbf{M}\xi_n = c$.

7. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — отрезок $[0, 1]$ с борелевской σ-алгеброй и мерой Лебега. В разложении числа $\omega \in \Omega$ в k-ичную дробь, $k \in \mathbb{N}$, обозначим n-й знак через ξ_n (если этот знак не определен однозначно, будем считать его нулем). Доказать, что ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины.

8. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые случайные величины. Доказать, что если сходятся ряды $\sum_n \mathbf{M}\xi_n$ и $\sum_n \mathbf{D}\xi_n$, то с вероятностью 1 сходится ряд $\sum_n \xi_n$.

9. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что если $\mathbf{M}\xi_i^+ = \infty$, $\mathbf{M}\xi_i^- < \infty$, то почти наверное $\lim_{n\to\infty} S/n = \infty$.

10. Пусть $\{\alpha_n\}$ — последовательность чисел, $\{\xi_n\}$ — последовательность случайных величин, которые порождают σ-алгебры $\sigma_n = \sigma(\xi_n)$, и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что если $\alpha_n \to 0$, то случайная величина $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n S_n$ измерима относительно остаточной σ-алгебры $\bigcap_n \sigma(\sigma_n, \sigma_{n+1}, \dots)$.