## 8. Задачи по теории вероятностей (07.12.07)

Следующее занятие 13 декабря в ком. 309.

**1**. Доказать, что если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова и $0 \le n_1 < n_2 < \ldots$, то $\xi_{n_1}, \xi_{n_2}, \ldots$ — тоже цепь Маркова.

**2**. Доказать, что если $\xi_n$ — цепь Маркова с множеством состояний $V$, то

$$\mathbf{P}(\xi_n = v_{i_n} | \xi_k = v_{i_k},\, k \in \{n_1, \ldots, n-1\} \cup \{n+1, \ldots, n_2\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\xi_n = v_{i_n} | \xi_{n-1} = v_{i_{n-1}}, \xi_{n+1} = v_{i_{n+1}})$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, $n_1 < n$, $n_2 > n$ и всех $v_{i_k}$, для которых это равенство имеет смысл.

**3**. Доказать, что если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — цепь Маркова и $0 \le n_0 < l_1 < \ldots$, то $\xi_{n_0}, \xi_{n_1}, \ldots$ — тоже цепь Маркова.

**4**. Предположим, что $2N$ занумерованных шаров в начальный момент времени произвольным образом разложены по двум ящикам. Затем последовательно производятся независимые испытания с исходами $1, 2, \ldots, 2N$, каждый из которых имеет вероятность $1/2N$; если исход $n$-го испытания равен $i$, то $i$-й шар перекладывается в другой ящик. Пусть $\xi_n$ — число шаров в первом ящике после $n$ перекладываний. Доказать, что $\xi_n$ — однородная цепь Маркова, и найти ее переходную матрицу.

**5**. Доказать, что если $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — однородная цепь Маркова с переходной матрицей $\mathcal{P}$, то $\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_0$ — тоже цепь Маркова. Можно ли утверждать, что она однородна?

**6**. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины с конечным или счетным множеством значений. Доказать, что последовательность сумм $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ является цепью Маркова.

**7**. Пусть $\xi_0, \xi_1, \ldots$ — независимые случайные величины с конечным или счетным множеством значений $V \subset \mathbb{R}$ и $f_0, f_1, \ldots$ — функции на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Положим $\eta_0 = \xi_0$ и $\eta_n = f_n(\eta_{n-1}, \xi_n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ Доказать, что $\eta_n$ — цепь Маркова.

**8**. Привести пример цепи Маркова $\xi_n$ с конечным множеством состояний $V$ и функции $f$ на $V$, для которых последовательность $f(\xi_n)$ не является цепью Маркова.

**9**. Пусть $\xi_n$ — однородная эргодическая цепь Маркова с конечным множеством состояний $V$ и $f$ — функция на $V$. Доказать, что последовательность случайных величин $f(\xi_n)$ удовлетворяет закону больших чисел.

**10**. Привести пример однородной цепи Маркова с конечным числом состояний и переходной матрицей $\mathcal{P}$, для которой не выполняется условие эргодичности, но при всех $i, j$ существует положительный предел $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)}$, где $p_{ij}^{(k)}$ — элемент с индексами $(ij)$ матрицы $\mathcal{P}^k$.